Mihai Hotinceanu

Fizica

Note de Curs, întrebări, probleme
(ediţie revizuită şi completată)

Editura Universităţii Petrol-Gaze din Ploieşti
2008

CUPRINS

LISTĂ DE NOTAŢII 7
MODULUL I. OSCILAŢII ŞI UNDE 9
1. OSCILAŢII 10
1.1 INTRODUCERE 10
1.2 OSCILAŢII MECANICE 10
1.2.1 Oscilaţii liniare libere 10
1.2.2 Oscilaţii amortizate 12
1.2.3 Oscilaţii întreţinute 15
1.3 Compunerea oscilaţiilor 17
1.3.2 Compunerea oscilaţiilor de aceeaşi direcţie şi perioadă 17
1.3.3 Compunerea oscilaţiilor perpendiculare 18
1.3.4 Compunerea oscilaţiilor cu aceeaşi direcţie şi pulsaţii diferite (fenomenul de bătăi). 19
2. PROPAGAREA OSCILAŢIILOR. UNDE MECANICE 21
2.1 INTRODUCERE 21
2.2 UNDA PLANĂ TRANSVERSALĂ 22
2.3 ECUAŢIA COARDEI VIBRANTE 24
2.4 PROPAGAREA UNDELOR LONGITUDINALE 25
2.5 PROPAGAREA UNDELOR ÎN LICHIDE 26
2.6 PROPAGAREA UNDELOR ÎN GAZE 27
2.7 DISPERSIA UNDELOR. VITEZA DE GRUP 28
2.8 GAMA UNDELOR MECANICE 29
2.9 INTENSITATEA SUNETULUI ŞI PRESIUNEA SONORĂ 30
2.10 FENOMENE COMUNE UNDELOR 31
2.11 EFECTUL DOPPLER ACUSTIC 32
3. PROBLEME. MODELE OPERAŢIONALE 34
TEST DE AUTOEVALUARE 42
BIBLIOGRAFIE 46
RĂSPUNSURI TEST AUTOEVALUARE 46
MODULUL II. ELECTRICITATE ŞI MAGNETISM 47
4. ELECTROSTATICA 49
4.1 INTRODUCERE 49
4.1.1 Despre interacţiune 49
4.1.2 Despre curenţi electrici 51
4.2 Legea lui Coulomb 52
4.3 CÂMPUL ELECTRIC 54
4.4 FLUXUL CÂMPULUI ELECTRIC. TEOREMA LUI GAUSS 57
4.5 LUCRUL MECANIC AL FORŢELOR CÂMPULUI ELECTRIC. POTENŢIALUL ELECTRIC 59
4.6 SUBSTANŢA ÎN CÂMP ELECTRIC 64
4.6.2 Polarizaţia electronică 68
4.6.3 Discontinuitatea vectorilor şi la suprafaţa de separaţie a doi dielectrici polarizaţi 71
4.6.4 Feroelectricitatea, piezoelectricitatea şi piroelectricitatea 75

4.7 CAPACITATEA ELECTRICĂ. CONDENSATOARE 77
4.7.1 Condensatoare legate în serie 78
4.7.2 Condensatoare legate în paralel 79
4.8 ENERGIA ELECTROSTATICĂ 81
4.8.1 Energia electrostatică a unui sistem de sarcini punctuale 81
4.8.2 Energia electrostatică a distribuţiilor continue de sarcină 82
4.8.3 Energia electrostatică în funcţie de câmpul electric 82
5. ELECTROCINETICA 85
5.1 CURENTUL ELECTRIC 85
5.2 CURENTUL ELECTRIC ÎN CONDUCTOARE 88
5.2.1 Legea lui Ohm 88
5.2.2 Tensiunea electromotoare. Legea lui Ohm 91
5.2.3 Energia şi puterea în curent continuu 93
5.2.4 Teorema transferului maxim de putere 93
5.2.5 Reţele electrice (în curent continuu) 94
5.3 CURENTUL ELECTRIC ÎN GAZE 97
5.4 CURENTUL ELECTRIC ÎN LICHIDE 99
5.4.1 Introducere 99
5.4.2 Legile electrolizei 100
5.5 CURENTUL ELECTRIC ÎN SEMICONDUCTORI 102
5.5.1 Noţiuni generale 102
5.5.2 Semiconductori intrinseci 102
5.5.3 Semiconductori extrinseci 104
5.5.4 Densitatea curentului într-un semiconductor 107
5.6 ALTE TIPURI DE CURENŢI ELECTRICI 109
5.6.1 Curentul optoelectronic 110
5.6.2 Curentul acustoelectric 110
5.6.3 Curentul termoelectric 110
5.6.4 Curenţi de emisie termoelectrică 110
5.6.5 Curenţi de deplasare 111
5.7 GENERATOARE ELECTRICE 111
5.7.1 Surse chimice de tensiune electromotoare. 111
5.7.2 Pile de combustie 113
5.7.3 Pile termoelectrice. 114
5.7.4 Celule solare. 115
6. MAGNETOSTATICA 116
6.1 CÂMPUL MAGNETIC AL CURENTULUI ELECTRIC 117
6.2 FORŢE CARE ACŢIONEAZĂ ÎNTR-UN CÂMP MAGNETIC 120
6.2.1 Forţa Lorentz 120
6.2.2 Forţa electromagnetică 120
6.2.3 Forţa electrodinamică 121
6.3 SUBSTANŢA ÎN CÂMP MAGNETIC 121
7. MIŞCAREA PARTICULELOR ÎN CÂMPURI ELECTRICE ŞI MAGNETICE 125
7.1 INTRODUCERE 126
7.2 MIŞCAREA ÎN CÂMP ELECTRIC STATIC 126
7.3 MIŞCAREA ÎN CÂMP MAGNETIC 127
7.3.1 Mişcarea în câmp magnetic transversal şi omogen 127
7.3.2 Mişcarea în câmp magnetic omogen 128
7.4 APLICAŢII 129
7.4.1 Filtre de viteze 129

7.4.2 Tubul catodic 132
7.4.3 Spectrometrul de masă 133
7.4.4 Determinarea sarcinii specifice a electronului 134
7.4.5 Acceleratoare de particule 136
7.4.6 Elemente de optică electronică 140
8. PROBLEME. MODELE OPERAŢIONALE 143
TEST DE AUTOEVALUARE 173
BIBLIOGRAFIE 178
RĂSPUNSURI TEST AUTOEVALUARE 178
MODULUL III. ELECTROMAGNETISM 179
9. INDUCŢIA ELECTROMAGNETICĂ 180
9.1 Fenomenul de inducţie electromagnetică 180
9.2 Energia câmpului magnetic 182
10. ECUAŢIILE LUI MAXWELL 183
10.1 Inducţia electromagnetică şi curentul de deplasare 183
10.2 Ecuaţiile lui Maxwell 186
11. UNDE ELECTROMAGNETICE 189
11.1 Oscilaţii şi unde electromagnetice 189
11.2 Polarizarea undelor electromagnetice 193
11.2.1 Starea de polarizare a undelor electromagnetice 193
11.2.2 Propagarea undelor electromagnetice în medii anizotrope 198
11.2.3 Birefringenţa provocată 200
11.2.4 Efectul Kerr 200
11.2.5 Efectul Cotton - Moutton 202
11.2.6 Efectul Faraday 202
11.2.7 Alte efecte de birefringentă provocată 203
11.2.8 Efectul Pockels 203
11.3 Fenomene produse de undele electromagnetice 203
11.3.1 Interferenţa luminii 204
11.3.2 Difracţia luminii 207
11.3.3 Absorbţia luminii 209
11.3.4 Dispersia luminii 210
12. PROBLEME. MODELE OPERAŢIONALE 211
BIBLIOGRAFIE 217
MODULUL IV. FIZICĂ CUANTICĂ
13. ELEMENTE DE MECANICĂ CUANTICĂ 219
13.1 Introducere 219
13.1.1 Noţiuni introductive 219
13.1.2 Funcţia de undă. Relaţiile lui Heisenberg 222
13.1.3 Ecuaţia lui Schrödinger 224
13.2 Aplicaţii ale ecuaţiei lui Schrödinger 226
13.2.1 Microparticula liberă 226
13.2.2 Microparticula în groapa unidimensională de potenţial 227
13.2.3 Bariera de potenţial. Efectul tunel 232
13.2.4 Oscilatorul liniar armonic 234
13.2.5 Atomul de hidrogen şi ionii hidrogenoizi. 238
BIBLIOGRAFIE 241
ANEXE 269
ANEXA 1. 243
14. VECTORI ŞI OPERAŢII CU VECTORI 243

14.1 Introducere. Clasificare 243
14.2 Operaţii de adunare şi scădere 244
14.2.1 Adunarea vectorilor 244
14.2.2 Scăderea vectorilor 246
14.2.3 Descompunerea vectorilor 246
14.3 Operaţii de înmulţire 247
14.3.1 Produsul unui vector cu un scalar. 247
14.3.2 Produsul scalar a doi vectori. 247
14.3.3 Produsul vectorial a doi vectori 248
14.3.4 Produsul mixt a trei vectori 250
14.3.5 Dublul produs vectorial a trei vectori 250
14.4 Operaţii de derivare şi integrare 250
14.4.1 Derivarea unui vector 250
14.4.2 Integrarea unui vector 251
14.4.3 Gradientul unei funcţii scalare 252
14.4.4 Divergenţa unui vector 253
14.4.5 Rotorul unui vector 254
14.5 Formule vectoriale 255
14.6 Teoreme de calcul vectorial 255
ANEXA 2. 257
15. PROBLEME PROPUSE CU REZULTATE 257
ANEXA 3 311
LUCRĂRI DE LABORATOR 311

LISTA DE NOTAŢII

Mărimea fizică	**UM**
x - elongaţia	m
A - amplitudinea	m
F - forţa	N
ω - pulsaţia	s^{-1}
T - perioada	s
υ - frecvenţa	s^{-1}
E,W - energia	J
m - masa	kg
ρ - densitatea	$\frac{kg}{m^3}$
λ - lungimea de undă	m
S - suprafaţa	m^2
V - volumul	m^3
v,u - viteza	$\frac{m}{s}$
a - acceleraţia	$\frac{m}{s^2}$
t - timpul	s
q,Q - sarcina electrică	C
$\vec{E}$ - intensitatea câmpului electric	$\frac{V}{m}$
V - potenţialul electric	V
Φ - fluxul unui vector	-
L - lucrul mecanic	J
P - puterea	W
C - capacitatea electrică	F
ε - permitivitatea electrică	$\frac{F}{m}$
I - intensitatea curentului electric	A
U - tensiunea electrică	V
R - rezistenţa electrică	Ω
ρ - rezistivitatea	$\Omega \cdot m$
σ - conductivitatea	$\Omega^{-1} \cdot m^{-1}$
$\vec{H}$ - intensitatea câmpului magnetic	$\frac{A}{m}$

$\vec{B}$ - inducţia magnetică	T
μ - permeabilitatea magnetică	$\frac{\text{H}}{\text{m}}$
c - viteza de propagare a luminii în vid	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$
$\vec{S}_P$ - vectorul Poynting	$\frac{\text{J}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}}$
L - inductanţa	H
n - indicele de refracţie	-
X_L - reactanţa inductivă	Ω
X_C - reactanţa capacitivă	Ω
Z - impedanţa	Ω
ψ - funcţia de undă	$\text{m}^{-3/2}$

MODULUL I. OSCILAŢII ŞI UNDE

Obiectivele modului

- *Cunoaşterea noţiunilor de bază ale fenomenelor periodice*
- *Tipuri de oscilaţii*
- *Compunerea oscilaţiilor*
- *Propagarea oscilaţiilor*
- *Modele de operare cu ajutorul cunoştinţelor acumulate*

Cuprins Modulul I

1. OSCILAŢII 10
1.1 Introducere 10
1.2 Oscilaţii mecanice 10
1.2.1 Oscilaţii liniare libere 10
1.2.2 Oscilaţii amortizate 12
1.2.3 Oscilaţii întreţinute 15
1.3 Compunerea oscilaţiilor 17
1.3.2 Compunerea oscilaţiilor de aceeaşi direcţie şi perioadă 17
1.3.3 Compunerea oscilaţiilor perpendiculare 18
1.3.4 Compunerea oscilaţiilor cu aceeaşi direcţie şi pulsaţii diferite (fenomenul de bătăi). 20
2. PROPAGAREA OSCILAŢIILOR. UNDE MECANICE 21
2.1 Introducere 21
2.2 Unda plană transversală 22
2.3 Ecuaţia coardei vibrante 24
2.4 Propagarea undelor longitudinale 25
2.5 Propagarea undelor în lichide 26
2.6 Propagarea undelor în gaze 27
2.7 Dispersia undelor. Viteza de grup 28
2.8 Gama undelor mecanice 29
2.9 Intensitatea sunetului şi presiunea sonoră 30
2.10 Fenomene comune undelor 31
2.11 Efectul Doppler acustic 32
3. PROBLEME. MODELE OPERAŢIONALE 34
TEST DE AUTOEVALUARE 42
BIBLIOGRAFIE 46
RĂSPUNSURI TEST AUTOEVALUARE 46

✍ adnotaţii ……

1. OSCILAŢII

1.1 Introducere

In general, orice fenomen în cursul căruia se transformă periodic sau pseudoperiodic, reversibil sau parţial reversibil, energia, dintr-o formă în alta poartă numele de oscilaţie. Evident, există o mare diversitate de tipuri de oscilaţii care pot fi clasificate în funcţie de natura energiilor sau a mărimilor fizice periodice care caracterizează fenomenele. Astfel, oscilaţiile pot fi:mecanice (vibraţii), electrice, electromagnetice, electromecanice, termice, nucleare etc.

Oscilaţiile efectuate de un sistem izolat, care a intrat în oscilaţie, la un moment dat, sub acţiunea unei cauze externe care după aceea nu mai acţionează asupra sistemului, se numesc oscilaţii libere sau oscilaţii proprii ale sistemului respectiv. Frecvenţa unei oscilaţii libere se numeşte frecvenţa proprie a sistemului.

Dacă sistemul nu este izolat ci pierde energie în timpul oscilaţiilor atunci oscilaţiile sale se numesc amortizate (amplitudinea acestora scade în timp).

Amortizarea poate fi împiedicată prin transmitere de energie din exterior către sistemul care oscilează. In acest caz oscilaţiile sistemului se numesc oscilaţii întreţinute. Dacă frecvenţa acţiunii externe care menţine oscilaţia este egală cu frecvenţa proprie a sistemului atunci oscilaţiile vor căpăta amplitudinea maximă;acesta constituie fenomenul de rezonanţă.

1.2 Oscilaţii mecanice

1.2.1 Oscilaţii liniare libere

Oscilaţiile liniare libere constau în deplasarea periodică a unui sistem în jurul unei poziţii de echilibru în prezenţa unui câmp de forţe elastice. Un câmp de forţe elastice poate fi considerat ca un câmp central caracterizat prin aceea că,

în orice punct, forţa aplicată în acel punct este orientată spre centrul forţelor iar modulul ei este proporţional cu distanţa de la centrul forţelor (poziţia de echilibru-O) la punctul de aplicaţie (figura 1.1).

$$F = -kx \tag{1.1}$$

Constanta de proporţionalitate k poartă (Figura 1.1) numele de constantă elastică.

Sistemele mecanice care execută mişcări oscilatorii libere au în poziţia de echilibru $(x = o)$ energia potenţială zero iar energia cinetică maximă. în timpul oscilaţiilor energia cinetică se transformă în energie potenţială şi invers.

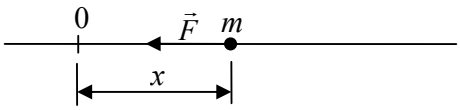


Figura 1.1

Ecuaţia mişcării unui punct material, cu masa m, asupra căruia acţionează forţa elastică 1.1 este

$$ma = -kx \text{ sau } m\ddot{x} + kx = 0 \tag{1.2}$$

Notând

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2 \tag{1.3}$$

ecuaţia mişcării devine

$$\ddot{x} + \omega_o^2 x = 0 \tag{1.4}$$

Soluţia generală a acestei ecuaţii este

$$x = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t} \tag{1.5}$$

Sau

$$x = A\sin(\omega_0 t + \varphi) \tag{1.6}$$

În legea de mişcare (1.6) mărimea A poartă numele de amplitudine a mişcării, ω_0 se numeşte pulsaţie iar $\omega_0 t + \varphi$, fază a mişcării.

Se observă că elongaţia x a mişcării se repetă, după un interval de timp T, numit perioadă a mişcării şi care are expresia

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{1.7}$$

Apelând la expresia 1.6 se poate calcula viteza şi acceleraţia mişcării

$$v = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = \omega_0 A\cos(\omega_0 t + \varphi) = \omega_0\sqrt{A^2 - x^2} \tag{1.8}$$

adnotaţii……

adnotaţii ……..

$$a = \frac{dv}{dt} = \ddot{x} = -\omega_0^2 A\sin(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0^2 x \qquad (1.9)$$

Energia totală a punctului material este suma dintre energia cinetică (E_c) şi energia potenţială (E_p)

$$E = E_c + E_p = \frac{mv^2}{2} + \int_0^x |F|\,dx = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2} = \frac{kA^2}{2} \qquad (1.10)$$

Mărimile x, v şi a, a căror expresii sunt, respectiv, 1.5, 1.8 şi 1.9, sunt reprezentate grafic în figura 1.2.

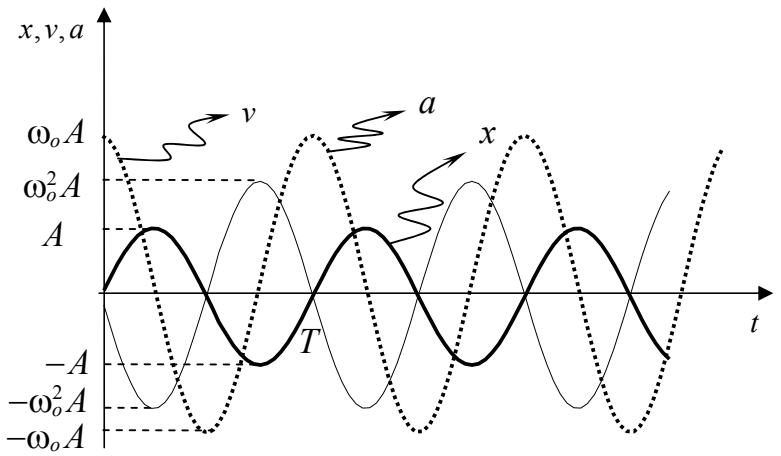


Figura 1.2

Din expresiile menţionate şi din figura 1.2 se observă că elongaţia x şi acceleraţia a sunt în opoziţie de fază iar viteza v este defazată înaintea elongaţiei cu $\frac{\pi}{2}$.

Mişcarea oscilatorie studiată mai sus reprezintă un caz ideal. într-o astfel de mişcare s-a ţinut seama doar de forţa elastică (forţă conservativă) dar au fost neglijate forţele neconservative exterioare cum ar fi forţele de frecare. în lipsa acestora energia totală are aceeaşi valoare tot timpul. Astfel de oscilaţii care au loc fără pierderi de energie poartă numele de oscilaţii nedisipative.

1.2.2 Oscilaţii amortizate

În realitate oscilatorul pierde energie (prin frecare, radiaţie) în timpul oscilaţiilor şi din acest motiv amplitudinea acestora scade în timp până devine

egală cu zero. Acest tip de oscilaţii, disipative de energie, poartă numele de oscilaţii (vibraţii) amortizate.

Pentru viteze de oscilaţie relativ mici forţele de rezistenţă ale mediului sunt proporţionale, în fiecare moment, cu viteza oscilatorului şi sunt îndreptate în sens opus vitezei

$$F_{rey} = -\rho v = -\rho \dot{x} \tag{1.11}$$

În expresia de mai sus ρ este un coeficient de rezistenţă a mediului care depinde de forma şi volumul oscilatorului cât şi de natura (vâscozitatea) mediului în care are loc oscilaţia.

Ecuaţia mişcării în acest caz, devine

$$ma = -\rho \dot{x} - kx \text{ sau } m\ddot{x} + \rho \dot{x} + kx = 0 \tag{1.12}$$

Utilizând notaţiile

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2 \text{ şi } \frac{\rho}{m} = 2\delta \tag{1.13}$$

Ecuaţia mişcării 1.12, devine

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{1.14}$$

Căutând soluţia ecuaţiei diferenţiale 1.14 sub forma $x = e^{nt}$, se obţine

$$e^{nt}(n^2 + 2\delta n + \omega_0^2) = 0$$

Rădăcinile ecuaţiei caracteristice $n^2 + 2\delta n + \omega_0^2 = 0$ sunt

$$n_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \tag{1.15}$$

În acest fel, soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale 1.14 este

$$x = C_1 e^{n_1 t} + C_2 e^{n_2 t} = C_1 e^{(-\delta + \sqrt{\delta_2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} \tag{1.16}$$

În funcţie de cum este valoarea rezistenţei mediului (mai slabă sau mai puternică) faţă de valoarea forţei elastice, rădăcinile 1.15 pot fi complexe sau reale. Se disting, în acest fel, mai multe cazuri.

Cazul 1, corespunzător frecărilor relativ mici $(\delta \left\langle \omega_0^2 \right)$.

În acest caz rădăcinile 1.15 sunt complex conjugate

$$n_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -\delta \pm i\omega \tag{1.17}$$

Iar soluţia generală 1.16 devine

✍ adnotaţii……

adnotaţii ……..

$$x = e^{-\delta t}(C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}) = A_0 e^{-\delta t}\sin(\omega t + \varphi) \qquad (1.18)$$

Analizând 1.18 se observă că în acest caz avem de a face cu o mişcare oscilatorie având perioada

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} \qquad (1.19)$$

Adică mai mare decât perioada $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ a oscilaţiilor libere.

De asemenea, amplitudinea acestei mişcări

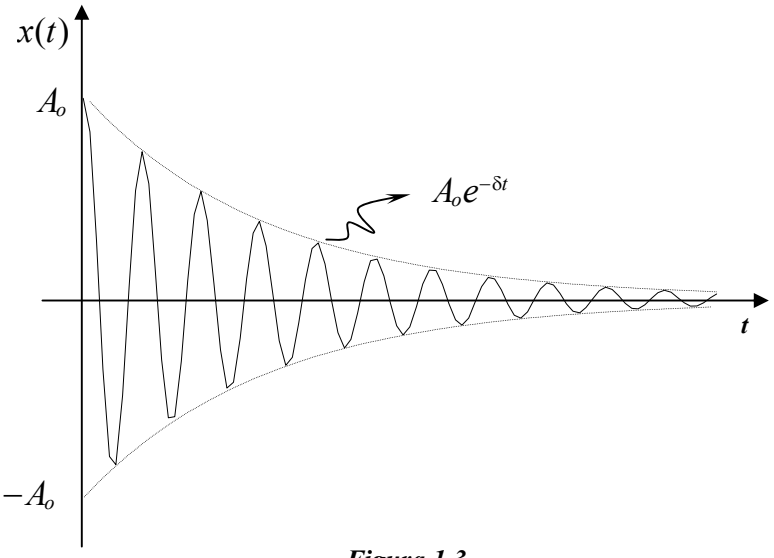


Figura 1.3

$$A = A_0 e^{-\delta t}$$

scade exponenţial în timp;scăderea este cu atât mai pronunţată cu cât factorul de amortizare δ este mai mare.

Graficul mişcării oscilatorii amortizate este reprezentat în figura 1.3

Amortizarea oscilaţiilor poate fi caracterizată cu ajutorul mărimii, numită decrement logaritmic al amplitudinii, care reprezintă logaritmul natural al raportului a două amplitudini care se succed la un interval de o perioadă adică a două amplitudini succesive, de aceeaşi parte a poziţiei de echilibru

$$\Delta = \ln\frac{A_n}{A_{n+1}} = \ln\frac{A_0 e^{-\delta t}}{A_0 e^{-(t+T)}} = \ln e^{\delta T} = \delta T$$

Cazul 2, corespunzător frecărilor relativ mari $(\delta \geq \omega_0)$

adnotaţii……

În acest caz, deoarece rădăcinile 1.15 sunt negative, rezultă că x tinde exponenţial către zero;este cazul unei mişcări aperiodice.

1.2.3 Oscilaţii întreţinute

Oscilaţiile pot fi menţinute adică amortizarea poate fi împiedicată dacă oscilatorul primeşte energie din exterior. Considerând că aportul de energie din exterior se face cu o forţă periodică

$$F_{ext} = F_o \sin \omega_1 t \tag{1.21}$$

Ecuaţia de mişcare în prezenţa forţei elastice $(-kx)$, a forţei de rezistenţă a mediului $(-\rho \dot{x})$ şi a forţei exterioare $(F_0 \sin \omega_1 t)$ este

$$m\ddot{x} = -\rho \dot{x} - kx + F_0 \sin \omega_1 t$$

$$\text{Sau } \ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \omega_1 t \tag{1.22}$$

Soluţia ecuaţiei diferenţiale neomogene 1.22 se obţine prin însumarea soluţiei ecuaţiei omogene, care are forma

$$x_1 = A_0 e^{-\delta t} \sin(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\, t + \varphi_0) \tag{1.23}$$

Şi o soluţie particulară de forma membrului drept

$$x_2 = A \sin(\omega_1 t + \varphi) \tag{1.24}$$

Datorită amortizării, soluţia x_1 poate fi neglijată după un interval de timp suficient de mare;de aceea, oscilaţiile sistemului vor fi descrise, după acest interval de timp, numai de soluţia particulară

$$x_2 = x = A \sin(\omega_1 t + \varphi) \tag{1.25}$$

Mişcarea descrisă de această soluţie se numeşte în regim staţionar;într-un asemenea regim, oscilaţiile sistemului se efectuează cu o frecvenţă egală cu cea a forţei de întreţinere şi nu cu frecvenţa proprie. Pentru a găsi constantele A şi φ se introduce 1.25 în 1.22

$$\dot{x} = \omega_1 A \cos(\omega_1 t + \varphi)\,;\ \ddot{x} = -\omega_1^2 A \sin(\omega_1 t + \varphi) \tag{1.26}$$

$$-A\omega_1^2 \sin(\omega_1 t + \varphi) + 2\delta\omega_1 A \cos(\omega_1 t + \varphi) + \omega_0^2 A \sin(\omega_1 t + \varphi) = \frac{F_0}{m} \sin \omega_1 t \tag{1.27}$$

sau

$$(\omega_0^2 - \omega_1^2) A \sin(\omega_1 t + \varphi) + 2\delta\omega_1 A \cos(\omega_1 t + \varphi) = \frac{F_0}{m} \sin \omega_1 t \tag{1.28}$$

adnotaţii ……..

Dezvoltând $\sin(\omega_1 t+\varphi)$ şi $\cos(\omega_1 t+\varphi)$ şi identificând coeficienţii lui $\sin\omega_1 t$ şi $\cos\omega_1 t$ din cei doi membri ai relaţiei astfel obţinute, rezultă

$$A(\omega_0^2-\omega_1^2)\cos\varphi-2\delta\omega_1 A\sin\varphi=\frac{F_0}{m} \qquad (1.29.a)$$

$$A(\omega_o^2-\omega_1^2)\sin\varphi+2\delta\omega_1 A\cos\varphi=0 \qquad (1.29.b)$$

Din sistemul 1.29 se deduc A şi φ

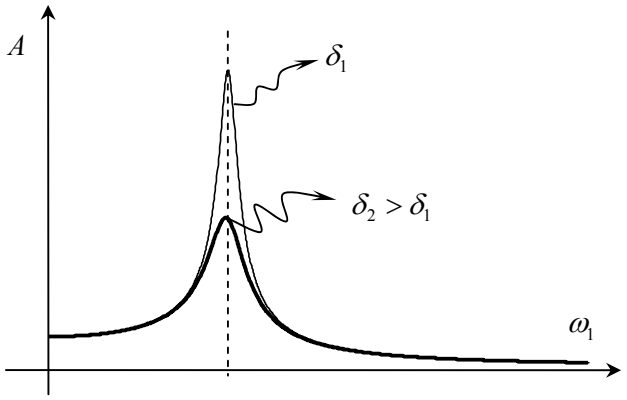


Figura 1.4

$$A=\frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_o^2-\omega_1^2)^2+4\delta^2\omega_1^2}} \qquad (1.30)$$

$$tg\varphi=\frac{2\delta\omega_1}{\omega_1^2-\omega_0^2} \qquad (1.31)$$

Dependenţa amplitudinii A de pulsaţia ω_1 a forţei exterioare este reprezentată în figura 1.4;se observă că, coeficientul δ are rolul unui parametru.

Mişcarea este deci întreţinută de către forţa exterioară şi după încetarea regimului tranzitoriu, în care există şi oscilaţii proprii ale sistemului, acesta intră în regim staţionar, frecvenţa mişcării fiind egală cu frecvenţa de vibraţie a forţei exterioare. Maximul amplitudinii, pentru cazul când variază frecvenţa, se poate afla derivând expresia amplitudinii, 1. 30, în funcţie de pulsaţie şi egalând-o cu zero

adnotaţii……

$$\frac{dA}{d\omega_1}=\frac{-\frac{F_0}{2m}\left[2(\omega_0^2-\omega_1^2)(-2\omega_1)+8\delta^2\omega_1^2\right]}{\left[(\omega_0^2-\omega_1^2)^2+4\delta^2\omega_1^2\right]^{\frac{3}{2}}}=0. \qquad (1.34)$$

De unde $$-\omega_1(\omega_0^2-\omega_1^2)+2\delta^2\omega_1^2=0. \qquad (1.35)$$

Deoarece $\omega_1=0$ nu este un caz de extrem pentru A, rezultă că frecvenţa ω_r pentru care amplitudinea oscilaţiilor este maximă (numit fenomen de rezonanţă) este

$$\omega_r=\sqrt{\omega_0^2-2\delta^2}\,. \qquad (1.36)$$

Valoarea maximă a amplitudinii se obţine înlocuind 1.36 în 1.30

$$A_{\max}=\frac{F_0}{2m\delta\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}}. \qquad (1.37)$$

Din această expresie rezultă că maximul amplitudinii este cu atât mai mare cu cât coeficientul de amortizare δ este mai mic, tinzând la infinit când δ tinde la zero. Cu cât coeficientul δ este mai mic cu atât pulsaţia de rezonanţă ω_r este mai apropiată de pulsaţia proprie ω_0.

1.3 Compunerea oscilaţiilor

Mişcările oscilatorii studiate în paragraful 1.2 reprezentau situaţiile în care asupra punctului material acţiona doar o singură forţă elastică. Un punct material poate fi însă supus simultan acţiunii mai multor forţe elastice şi dacă considerăm că fiecare din ele este cauza unei oscilaţii

Atunci putem spune că acel punct material este supus acţiunii simultane a mai multor oscilaţii. Interesează mişcarea care rezultă din compunerea acestor oscilaţii. Vor fi studiate câteva cazuri particulare.

1.3.1 Compunerea oscilaţiilor de aceeaşi direcţie şi perioadă

Fie două oscilaţii de aceeaşi direcţie (x) şi aceeaşi perioadă $\left(T=\frac{2\pi}{\omega}\right)$

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1\sin(\omega t+\varphi_1)\\ x_2 &= A_2\sin\left(\omega t+\varphi_2\right)\end{aligned} \qquad (1.38)$$

În urma compunerii acestora, rezultă o oscilaţie de forma

✍ adnotaţii ……..

$$x = A\sin(\omega t + \varphi) \tag{1.39}$$

unde $x = x_1 + x_2$ (1.40)

Înlocuind în 1.40 expresiile lor din 1.38 şi 1.39, în urma identificărilor, se găseşte

$$\begin{aligned} A\sin\varphi &= A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2 \\ A\cos\varphi &= A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2 \end{aligned} \tag{1.41}$$

Rezolvând sistemul 1.41, se găseşte

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \tag{1.42}$$

$$tg\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} \tag{1.43}$$

Amplitudinea mişcării rezultante 1.42 depinde de valoarea diferenţei de fază $\Delta\varphi = (\omega t + \varphi_2) - (\omega t + \varphi_1) = \varphi_2 - \varphi_1$

Dacă $\Delta\varphi = 0$ (oscilaţii în fază), atunci

$$A = A_1 + A_2 \tag{1.44}$$

Dacă $\Delta\varphi = \pi$ (oscilaţii în opoziţie de fază), atunci

$$A = A_2 - A_1 \tag{1.45}$$

Dacă $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$ (oscilaţii în cuadratură), atunci

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \tag{1.46}$$

1.3.2 Compunerea oscilaţiilor perpendiculare

Fie un punct material supus simultan la două oscilaţii perpendiculare (pe direcţiile x şi y);considerăm că cele două oscilaţii au aceeaşi pulsaţie.

$$\begin{aligned} x &= A\sin(\omega t + \varphi_1) \\ y &= B\sin(\omega t + \varphi_2) \end{aligned} \tag{1.47}$$

Eliminând timpul, din 1.47 se va găsi ecuaţia generală a traiectoriei punctului material care este ecuaţia generală a unei elipse înscrise într-un dreptunghi cu laturile 2A şi 2B

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 2\frac{x}{A}\frac{y}{B}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1) \tag{1.48}$$

Dacă $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = (-1)^n\pi, cu$ n=0, 1, 2, … atunci 1.48 devine

adnotaţii……

$$y = \pm \frac{B}{A} x \qquad (1.49)$$

adică punctual material se mişcă pe o dreaptă.

Dacă

$\Delta\varphi = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n = 0,1,2,...$ atunci 1.48 devine

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 \qquad (1.50)$$

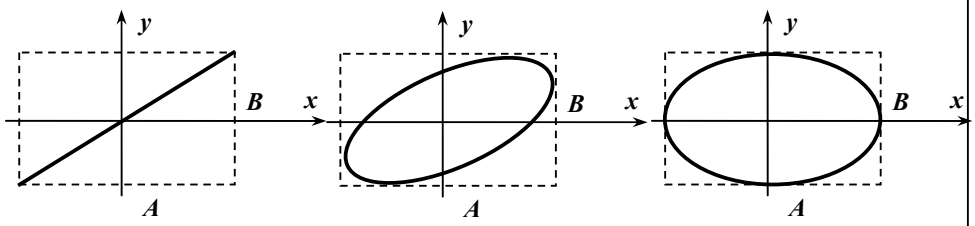
Adică punctual material se mişcă pe o traiectorie eliptică centrată la axele ox şi oy care sunt şi direcţiile de oscilaţie a celor două oscilaţii care se compun.

În cazul în care A=B=R expresia 1.50 devine

$$x^2 + y^2 = R^2 \qquad (1.51)$$

Adică mişcarea are loc pe un cerc cu raza R.

În figura 1.5 sunt reprezentate unele din situaţiile prezentate mai sus.



a) $\Delta\varphi = 0$ ***b)*** $0 < \Delta\varphi < \pi/2$ ***b)*** $\Delta\varphi = \pi/2$

Figura 1.5

Valoarea vitezei în fiecare punct al traiectoriei şi sensul în care este parcursă traiectoria se determină după relaţiile

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ cu $\dot{x} = \omega A \cos(\omega t + \varphi_1)$ şi $\dot{y} = \omega B \cos(\omega t + \varphi_2)$

Observaţie. Dacă cele două oscilaţii perpendiculare au pulsaţii diferite atunci traiectoriile mişcărilor rezultante sunt curbe complicate numite figuri Lissajous. Forma acestora depinde de valoarea diferenţei de fază şi de raportul perioadelor lor de oscilaţie.

adnotaţii ……..

1.3.3 Compunerea oscilaţiilor cu aceeaşi direcţie şi pulsaţii diferite (fenomenul de bătăi).

Considerăm două oscilaţii paralele cu pulsaţii diferite

$$\begin{aligned} x_1 &= A\sin\omega_1 t \\ x_2 &= A\sin\omega_2 t \end{aligned} \qquad (1.52)$$

Unde $\omega_1 = \omega - \Delta\omega, \omega_2 = \omega + \Delta\omega$ şi $\Delta\omega \ll \omega$

Compunând cele două oscilaţii, se obţine

$$x = x_1 + x_2 = A\sin(\omega - \Delta\omega)t + A\sin(\omega + \Delta\omega)t = 2A\cos\Delta\omega t \cdot \sin\omega t \quad (1.53)$$

Din expresia 1.53 se observă că mişcarea rezultantă are amplitudinea

$$A_{rez} = 2A\cos\Delta\omega t \qquad (1.54)$$

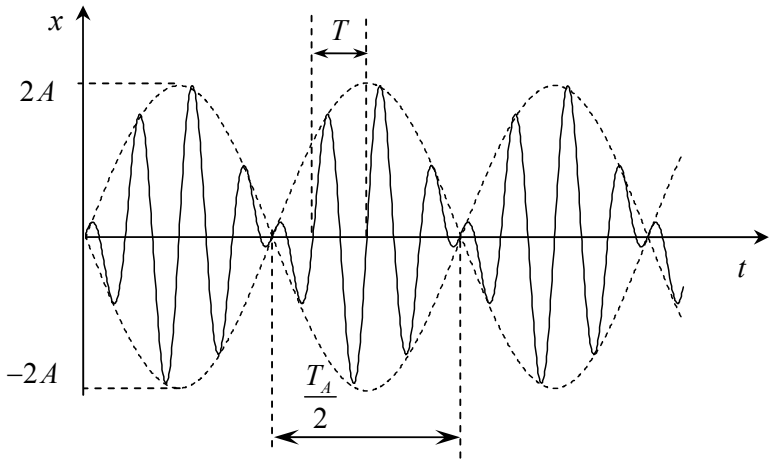


Figura 1.6

Modulată periodic cu perioada

$$T_A = \frac{2\pi}{\Delta\omega} \qquad (1.55)$$

Observaţie. Dacă cele două oscilaţii care se compun au amplitudini egale (cazul prezentat mai sus) atunci amplitudinea rezultantă variază între zero şi $|2A|$ iar dacă amplitudinile sunt diferite atunci amplitudinea rezultantă variază între $A_1 + A_2$ şi $|A_1 - A_2|$.

Tot din expresia 1.53 se observă că perioada mişcării rezultante este

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \angle \frac{2\pi}{\Delta\omega} = T_A \qquad (1.56)$$

Rezultatele prezentate mai sus sunt reprezentate grafic în figura 1.6

adnotaţii……

2. PROPAGAREA OSCILAŢIILOR. UNDE MECANICE

2.1 Introducere

Oscilaţiile unui punct material dintr-un mediu se transmit din aproape în aproape datorită forţelor de interacţiune dintre particulele mediului. De fapt, propagarea oscilaţiilor într-un mediu reprezintă transportul energiei oscilaţiilor prin acel mediu. Dacă în cursul propagării energia oscilaţiilor se transformă în alte forme de energie (de exemplu în energie termică) atunci se spune că acel mediu este absorbant.

Oscilaţiile se propagă sub formă de unde. în general se poate considera că o undă reprezintă o perturbaţie (mecanică, electromagnetică) care se propagă în spaţiu, din aproape în aproape, prin intermediul unui câmp (câmp de forţe elastice, de presiune, câmp electromagnetic).

Dacă v reprezintă viteza de propagare a unei unde (numită viteză de fază) după o anumită direcţie atunci distanţa parcursă de undă în timpul unei perioade T de oscilaţie se numeşte lungime de undă (λ)

$$\lambda = vT = \frac{v}{\upsilon} \tag{2.1}$$

unde υ poartă numele de frecvenţă.

Un tip de unde (perturbaţii) importante din punct de vedere fizic este cel al undelor periodice, la care funcţia de undă (mărimea perturbată) $\psi(x,t)$ are proprietatea

$$\psi(x,t) = \psi(x,t+nt), n = 1,2,.. \tag{2.2}$$

Aceasta înseamnă că într-un punct dat (x=ct.), funcţia ψ ia aceeaşi valoare când t variază cu cantităţile T, 2T, 3T, …Echivalent, aceasta înseamnă că la un anumit moment t funcţia ψ ia aceeaşi valoare când x creşte sau descreşte cu cantităţile $\lambda = vT, 2\lambda = 2vT,..$

$$\psi(x,t) = \psi(x \pm nvT, t) = \psi(x, t \pm nT) \tag{2.3}$$

Din 2.2 şi 2.3 rezultă că funcţia de undă are forma $\psi(x \pm vt)$

Notând $u = x \pm vt$, derivatele pentru funcţia ψ sunt

adnotaţii ……..

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2},\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=v^2\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}$$

Rezultă

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0 \qquad (2.4)$$

Dacă unda se propagă într-un mediu omogen, izotrop şi neabsorbant atunci funcţia de undă are forma $\psi(x,y,z,t)=\psi(\vec{r},t)$ iar ecuaţia 2.4 devine

$$\Delta\psi-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0 \qquad (2.5)$$

Ecuaţiile 2.4 şi 2.5 poartă numele de ecuaţia diferenţială a undelor.

Soluţia generală a ecuaţiei 2.4 este

$$\psi(x,t)=f_1(x-vt)+f_2(x+vt) \qquad (2.6)$$

sau

$$\psi(x,t)=f\left(t-\frac{x}{v}\right)+\varphi\left(t+\frac{x}{v}\right) \qquad (2.7)$$

Cei doi termeni corespund superpoziţiei a două unde Primul termen corespunde undei progresive, adică undei care se propagă în sensul axei 0x iar cel de al doilea termen corespunde undei regresive care se propagă în sens opus.

Dacă unda se propagă într-un singur sens atunci, evident, se foloseşte un singur termen al funcţiei. Dacă însă unda se reflectă, atunci se utilizează ambii termeni.

Locul geometric al punctelor care au la un moment dat aceeaşi fază, adică

$$x-vt=ct \text{ sau } x+vt=ct$$

poartă numele de suprafaţă de undă.

Se observă că viteza cu care se deplasează aceste suprafeţe este

$$v=\pm\frac{dx}{dt}$$

şi din acest motiv se numeşte viteză de fază.

În funcţie de forma suprafeţelor de undă, undele pot fi clasificate în unde plane, sferice, elipsoidale etc.

2.2 Unda plană transversală

adnotații……

Vom considera un mediu omogen şi izotrop în care propagarea undelor are loc fără atenuare. Dacă toţi oscilatorii situaţi într-un plan perpendicular pe direcţia de propagare a undei oscilează în fază atunci unda este plană.

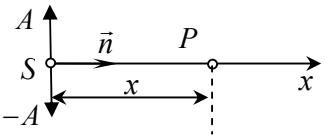


Figura 2.1

Fie un oscilator (sursă de oscilaţii) S (figura 2.1) care oscilează după legea

$$y(x,t)=\psi_s(x,t)=A\sin\omega t=A\sin 2\pi\frac{t}{T} \tag{2.8}$$

Oscilaţiile care au loc pe direcţia y şi se propagă pe o direcţie perpendiculară x, poartă numele de oscilaţii transversale.

Considerând doar unda progresivă (care se propagă de la S spre P), funcţia de undă în punctul P va fi (vezi şi 2.7)

$$\begin{aligned}\psi_p(x,t)&=f\left(t-\frac{x}{v}\right)=A\sin\omega\left(t-t'\right)=\\&=A\sin\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)=A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)=A\sin\left(\omega t-kx\right)\end{aligned} \tag{2.8}$$

În expresia 2.8, mărimea

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{\omega}{v} \tag{2.9}$$

Poartă numele de număr de undă şi este egal cu numărul de lungimi de undă λ care sunt cuprinse în 2π unităţi de lungime.

În general se defineşte vectorul de undă,

$$\vec{k}=k\vec{n}=\frac{2\pi}{\lambda}\vec{n} \tag{2.10}$$

unde $\vec{n}$ este versorul direcţiei de propagare a undei.

Astfel, ecuaţia undei plane monocromatice care se propagă pe direcţia $\vec{k}$ are forma

$$\psi(\vec{r},t)=A\sin\left(\omega t-\vec{k}\vec{r}\right) \tag{2.11}$$

Ecuaţia

$$\omega t-\vec{k}\vec{r}=const$$

Sau

adnotaţii ……..

$$\omega t - \left(k_x x + k_y y + k_z z\right) = const \qquad (2.12)$$

Reprezintă ecuaţia unui plan la un moment dat t (suprafaţă de undă) iar vectorul $\vec{k}$ este perpendicular pe acest plan.

2.3 Ecuaţia coardei vibrante

Considerăm o coardă AB fixată la capete de-a lungul axei 0x (

Fie M un punct de pe coarda AB şi fie PQ un element de coardă cu lungimea dx din jurul punctului M. în timpul vibraţiei coardei, la un moment t, elementul de coardă PQ va ocupa poziţia $P'Q'$ fiind tensionat de forţele T şi $T'\left(T \approx T'\right)$.

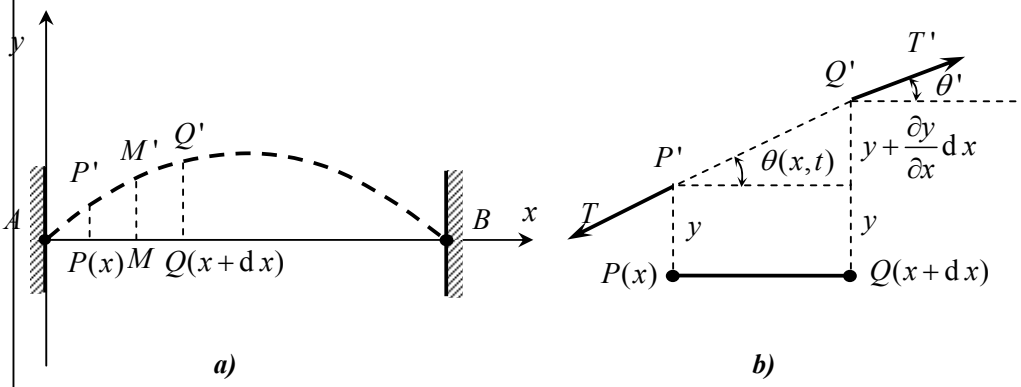


Figura 2.2

Rezultanta acestor forţe pe axa oy tinde să readucă elementul $P'Q'$ în poziţia PQ. Valoarea acestei forţe este

$$dT_y = T' \sin\theta' - T \sin\theta \qquad (2.13)$$

unde $\theta' = \theta + \frac{\partial\theta}{\partial x} dx$.

Unghiurile fiind mici $tg\theta \simeq \theta = \frac{dy}{dx}$ şi $\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ (2.14)

În acest fel 2.13 devine

$$dT_y = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx \qquad (2.15)$$

Dacă m este masa corzii şi l lungimea acesteia, masa unităţii de lungime este $\mu = \frac{m}{l}$ şi din legea a doua a mecanicii se obţine

adnotații……

$$dT_y = \mu \cdot dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{2.16}$$

Egalând 2.15 cu 2.16 se găseşte

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\mu}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \tag{2.17}$$

Se observă că ecuaţia diferenţială 2.17 are aceeaşi structură cu ecuaţia diferenţială a undelor 2.4 în care

$$v = v_{tr} = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \tag{2.18}$$

Este viteza undelor transversale din coardă.

2.4 Propagarea undelor longitudinale

Undele longitudinale se propagă atât în medii solide cât şi în fluide (lichide şi gaze);undele transversale se propagă numai în medii solide. La undele transversale oscilaţiile particulelor mediului se fac perpendicular pe direcţia de propagare a undei în timp ce la undele longitudinale particulele mediului elastic oscilează pe direcţia propagării undei, astfel încât în mediu există în orice moment o succesiune de deformaţii de comprimare şi destindere.

Pentru a obţine ecuaţia de propagare a undelor longitudinale într-un mediu solid elastic cu densitatea ρ şi modulul de elasticitate E vom considera o epruvetă sub forma unei bare de secţiune S (figura 2.3). Fie o perturbaţie F produsă în planul AB al barei, pe direcţia barei, şi care se propagă de-a lungul acesteia (axa 0x). în timpul propagării undei de-a lungul barei,

Planul de abscisă x devine x+X iar planul de abscisă x+dx devine $x + dx + X_{x+dx}$. Lungimea porţiunii dx a elementului de bară cu volumul dV=Sdx trece la valoarea

$$\left(x + dx + X_{x+dx}\right) - \left(x + X\right) \simeq dx + \frac{\partial X}{\partial x} dx \tag{2.19}$$

Legea lui Hooke în acest caz se scrie astfel

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{1}{E}\frac{F}{S} \tag{2.20}$$

şi $$dF = ES\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} dx \tag{2.21}$$

adnotaţii ……..

Pe de altă parte legea a doua a dinamicii în acest caz se scrie astfel

$$dF = dm \cdot a = \rho dV \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} dx \qquad (2.22)$$

Egalând expresiile pentru dF din 2.21 şi 2.22, se găseşte

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = 0 \qquad (2.23)$$

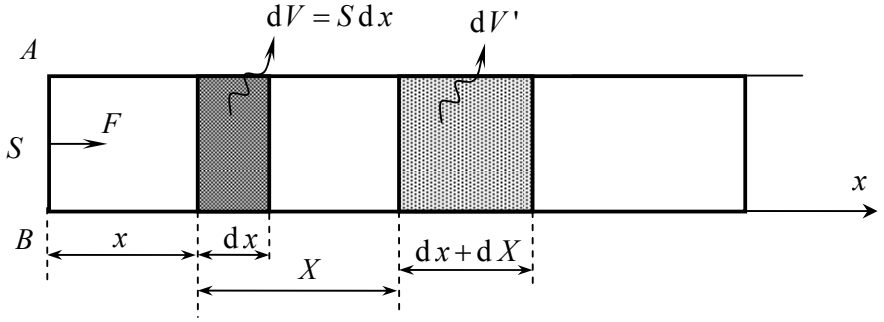


Figura 2.3

Comparând 2.23 cu 2.4 se găseşte viteza de propagare a undelor longitudinale (v_l) într-un mediu elastic cu densitatea ρ şi modulul de elasticitate E

$$v_l = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \qquad (2.24)$$

2.5 Propagarea undelor în lichide

Propagarea undelor în lichide poate fi studiată prin analogie cu propagarea undelor longitudinale în bare unde în locul barei se va considera un cilindru plin cu un lichid. O perturbaţie produsă la un capăt al cilindrului se va propaga sub forma unei unde progresive de-a lungul cilindrului constând în variaţii ale densităţii lichidului. Deoarece lichidele au conductivitate termică mică iar în cazul oscilaţiilor sonore frecvenţa este mare (perioada mică), căldura nu are timp să se disipe în mediu şi în acest fel propagarea sunetelor este adiabatică.
Pentru lichide legea lui Hooke are forma

$$dV = -\frac{1}{\chi} V dp \qquad (2.25)$$

adnotaţii……

unde dp este presiunea exterioară care acţionând asupra volumului V produce variaţia dV a acestuia; χ joacă rolul lui E şi poartă numele de modul de compresibilitate.

Urmând acum acelaşi raţionament ca şi în cazul prezentat în paragraful 2.4, se găseşte pentru viteza de propagare a undelor în lichide, expresia

$$v_{lichide} = \sqrt{\frac{\chi}{\rho}} = \sqrt{\frac{\Delta p}{\Delta \rho}} \qquad (2.26)$$

unde $\Delta p = p - p_0$ şi $\Delta \rho = \rho - \rho_0$

Mărimile p_0 şi ρ_0 reprezintă presiunea şi densitatea fluidului în absenţa undei iar p şi ρ în prezenţa acesteia.

2.6 Propagarea undelor în gaze

Deoarece gazele ca şi lichidele fac parte din categoria fluidelor rezultă că în gaze se propagă doar undele longitudinale.

Dacă frecvenţa oscilaţiilor care se propagă este mică (perioada este mare) atunci în timpul unei perioade de comprimare şi rarefiere între regiunea în care se propagă unda şi mediul înconjurător are loc schimb de energie. Aceasta face ca regiunea în care se propagă unda să rămână la temperatură constantă;spunem că avem de a face cu un proces izoterm de propagare a oscilaţiilor.

Dacă frecvenţa este mare (perioada mică) atunci în timpul unei perioade nu poate avea loc un schimb energetic astfel încât propagarea este adiabatică.

Propagarea izotermă respectă legea $pV = const$ şi astfel

$$p \cdot dV + V \cdot dp = 0, dV = -\frac{1}{p} V \cdot dp \qquad (2.29)$$

Comparând 2.27 cu 2.25 şi făcând raţionamentul din paragraful 2.5 se găseşte pentru viteza de propagare izotermă în gaze, expresia

$$v_{izot} = \sqrt{\frac{p}{\rho}} \qquad (2.28)$$

Propagarea adiabatică se face respectând legea acestei transformări

$$p \cdot V^{\gamma} = const \qquad (2.29)$$

adnotaţii ……..

unde $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ este exponentul adiabatic.

Din 2.29 se obţine

$$dV = -\frac{1}{p\gamma} V \cdot dp$$

şi pentru viteza propagării adiabatice expresia

$$v_{ad} = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}} \qquad (2.31)$$

S-a considerat că acel gaz este ideal şi respectă ecuaţia gazelor perfecte $p\mu = \rho RT$, unde μ este masa molară a gazului, T este temperatura absolută a gazului iar R este constanta gazelor perfecte.

2.7 Dispersia undelor. Viteza de grup

Până în prezent au fost studiate fenomenele legate de propagarea undelor considerând că acestea au forma 2.11 adică sunt unde monocromatice caracterizate de frecvenţa $\upsilon = \frac{\omega}{2\pi}$. în practică se întâlnesc situaţii în care avem de a face cu propagarea unor unde compuse dintr-un număr foarte mare de unde sinusoidale cu frecvenţe foarte apropiate între ele. Dacă o undă monocromatică se propagă cu viteza v, numită viteză de fază şi care depinde de frecvenţa acesteia, atunci grupul (pachetul) de unde se va deplasa cu o viteză v_g, numită viteză de grup. Altfel spus, viteza de grup, care diferă de viteza undelor componente, reprezintă viteza cu care se deplasează maximul amplitudinii rezultante şi deci al densităţii de energie a undei.

Dacă considerăm cazul simplu a două unde monocromatice cu frecvenţele $\upsilon_1 = \frac{\omega_1}{2\pi}$ şi $\upsilon_2 = \frac{\omega_2}{2\pi}$ şi numerele de undă $k_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1}$ şi $k_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2}$, atunci maximul amplitudinii rezultante la momentul t_0 se va găsi în punctul de abscisă x_0 unde undele sunt în fază

$$\omega_1 t_0 - k_1 x_0 = \omega_2 t_0 - k_2 x_0, \Delta\varphi = (\omega_2 - \omega_1)t - (k_2 - k_1)x_0 = 0 \qquad (2.32)$$

adnotaţii……

Fie $t_0 + dt$ şi $x_0 + dx$, momentele, respectiv abscisele pentru care fazele din nou coincid, adică avem un maxim de amplitudine

$$(\omega_2 - \omega_1)(t_0 + dt) - (k_2 - k_1)(x_0 + dx) = 0 \qquad (2.33)$$

Ţinând seama de 2.32, expresia 2.33 devine

$$(\omega_2 - \omega_1)\,dt - (k_2 - k_1)\,dx = 0 \qquad (2.34)$$

Astfel viteza maximului de amplitudine, adică viteza de grup, este

$$v_g = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{k_2 - k_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \qquad (2.35)$$

În general viteza de grup are expresia

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(vk)}{dk} = -\lambda^2 \frac{d\left(\frac{v}{\lambda}\right)}{d\lambda} = v - \lambda\frac{dv}{d\lambda} \qquad (2.36)$$

Fenomenul prin care undele cu frecvenţe diferite se propagă cu viteze diferite poartă numele de dispersie a undelor.

2.8 Gama undelor mecanice

Undele mecanice existente în natură ocupă o anumită gamă de frecvenţe. Clasificarea acestora este dată în tabelul 2.1

Tabelul 2.1

Denumirea domeniului	***Infrasunete (Infraacustica)***	***Sunete (Acustica)***	***Ultrasunete (Ultraacustica)***	***Hipersunete (Hiperacustic)***
Gama de Frecvenţe (Hz)	***<16***	***16-20000***	***20000-20 10^8***	***>20 10^8***

Undele mecanice care impresionează urechea umană, adică produc o senzaţie auditivă, poartă numele de sunete. Pentru ca o undă mecanică să producă senzaţie auditivă, sunt necesare, de fapt, mai multe condiţii:

- să aibă o durată mai mare de 0, 05 secunde,
- să aibă o frecvenţă cuprinsă între 16-20000Hz,

✍ adnotaţii ……..

• să aibă o valoare minimă, numită prag de audibilitate (de exemplu pentru o frecvenţă de 10^3 Hz acesta este de $10^{-12}\frac{W}{m^2}$).

Trebuie de precizat că urechea umană nu reacţionează proporţional cu mărimea excitaţiei. Dacă intensitatea excitaţiei (I) creşte în progresie geometrică, intensitatea senzaţiei (S) creşte în progresie aritmetică (legea Weber-Fechner).

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \lg\frac{I_2}{I_1} \qquad (2.37)$$

De asemenea trebuie spus că urechea umană are sensibilitatea maximă în domeniul de frecvenţe cuprins între $10^3 - 3\cdot 10^3\, Hz$.

Vibraţiile cuprinse între 0-16Hz, numite infrasunete, nu sunt sesizate de urechea umană dar sunt percepute de anumite animale, păsări şi peşti. De asemenea oscilaţiile cu frecvenţa mai mare de 20kHz (ultrasunetele) sunt percepute de lilieci, delfini, câini, ţânţari, rozătoare. Ultrasunetele, care pot fi produse prin efectul piezoelectric sau prin fenomenul de magnetostricţiune, cunosc o gamă largă de aplicaţii: sonolocaţia, ecografia, defectoscopia nedistructivă, sudarea şi lipirea cu ultrasunete, detensionarea cu ultrasunete, prelucrarea şi curăţirea cu ultrasunete, amestecarea lichidelor nemiscibile, obţinerea de aerosoli etc.

2.9 Intensitatea sunetului şi presiunea sonoră

Fie o undă sonoră care transportă energia totală dW printr-o suprafaţă S (normală la viteza undei v) în intervalul de timp dt. în acest interval de timp unda sonoră se propagă pe distanţa dl. Energia totală este suma dintre energia cinetică a particulelor care oscilează şi energia potenţială elastică de deformare. Fluxul Φ de energie reprezintă cantitatea de energie (dW) care trece prin suprafaţa S în unitatea de timp

$$\Phi = \frac{1}{S}\frac{dW}{dt} = \frac{\varpi \cdot S \cdot dl}{S \cdot dt} = \varpi \cdot v \qquad (2.38)$$

unde ϖ este densitatea de energie.

Valoarea medie în timp a fluxului de energie poartă numele de intensitate a undei (sunetului)

adnotaţii……

$$I = \langle \varpi \rangle v \tag{2.39}$$

O altă mărime care caracterizează unda sonoră în fiecare punct al ei este presiunea sonoră P_S dată de diferenţa dintre presiunea p, într-un punct, în prezenţa undei şi presiunea p_0 în acelaşi punct în absenţa undei

$$P_S = p - p_0 \tag{2.40}$$

În cazul undelor sonore, perturbaţia care se propagă este o perturbaţie a presiunii iar legea lui Hooke este(vezi şi 2.20)

$$P_S(x) = \frac{F}{S} = E\frac{\partial X}{\partial x} = E\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{2.41}$$

Ţinând seama de 2.8, pentru 2.41 se găseşte

$$P_S(x) = -\frac{2\pi}{\lambda} EA\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \tag{2.42}$$

Deoarece $v_l = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ şi $\lambda = vT$, se găseşte

$$\begin{aligned} P_S(x) &= -\frac{2\pi}{T}\rho vA\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = \\ &= \frac{2\pi}{T}\rho vA\sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) - \frac{\pi}{2}\right] \end{aligned} \tag{2.43}$$

Presiunea sonoră maximă este

$$P_{S(\max)} = \frac{2\pi}{T}\rho vA \tag{2.44}$$

Din 2.43 se observă că presiunea sonoră este defazată cu $\frac{\pi}{2}$ în urma funcţiei de undă ψ.

2.10 Fenomene comune undelor

Cu ajutorul undelor se pot obţine următoarele fenomene: reflexia, refracţia, dispersia, interferenţa, difracţia, atenuarea şi polarizarea (doar pentru undele transversale). Studiul acestor fenomene se va face doar pentru undele electromagnetice.

adnotaţii ……..

2.11 Efectul Doppler acustic

Efectul Doppler constă în variaţia frecvenţei recepţionate de un receptor dacă sursa şi receptorul sunt în mişcare relativă.

În acest caz se disting trei situaţii:

- sursa S este mobilă şi observatorul O este fix,
- sursa S este imobilă şi observatorul O este mobil,
- sursa S şi observatorul O sunt mobile.

Se va analiza prima situaţie în care sursa S se apropie de observatorul O fix cu viteza v_s (figura 2.4). Fie o vibraţie care porneşte de la sursa S la momentul t. Ea va ajunge în punctual O la momentul $t+\frac{|SO|}{v}$, unde v este viteza de propagare a vibraţiei. După o perioadă T, adică la momentul t+T, pleacă de la sursa S a doua vibraţie;sursa S a parcurs între timp spaţiul $|SS'|=v_s\cdot T$. A doua vibraţie ajunge la observatorul (receptorul) O după timpul

$$t+T+\frac{|SO|-|SS'|}{v}=t+T+\frac{|SO|-v_sT}{v} \qquad (2.45)$$

Diferenţa, în timp, între cele două vibraţii recepţionate de observatorul O este

$$\Delta t=T'=T-\frac{v_sT}{v}=T\frac{v-v_s}{v} \qquad (2.46)$$

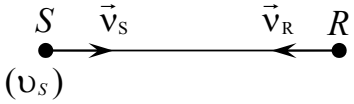


Figura 2.4

Deoarece $v=\lambda T^{-1}=\lambda\upsilon$, unde λ este lungimea de undă iar υ este frecvenţa vibraţiilor, se obţine

$$\upsilon'=\upsilon\frac{v}{v-v_s} \qquad (2.47)$$

adnotaţii……

Din expresia 2.47 se observă că la apropierea sursei de vibraţie S de un observator fix O, frecvenţa vibraţiilor recepţionate υ' este mai mare decât frecvenţa vibraţiilor emise υ.

Dacă sursa S se îndepărtează de observatorul O, atunci

$$T' = T\frac{v + v_s}{v}, \upsilon' = \upsilon\frac{v}{v + v_s} \qquad (2.48)$$

Făcând un raţionament analog şi pentru celelalte situaţii, se poate completa tabelul 2.2

Tabelul 2.2

S mobil (cu viteza v_s) ***O fix***	***S fix*** ***O mobil (cu viteza v_o)***	***S mobil(cu viteza v_s)*** ***O mobil (cu viteza v_o)***
$T' = T\frac{v \mp v_s}{v}$ $\upsilon' = \upsilon\frac{v}{v \mp v_s}$	$T' = T\frac{v}{v \pm v_0}$ $\upsilon' = \upsilon\frac{v \pm v_o}{v}$	$T' = T\frac{v \mp v_s}{v \pm v_o}$ $\upsilon' = \upsilon\frac{v \pm v_o}{v \pm v_s}$

✍ adnotaţii ……

3. PROBLEME. MODELE OPERAŢIONALE

1. Punctul O al unei bare elastice cu modulul de elasticitate $E = 7 \cdot 10^{10} \frac{N}{m^2}$ şi densitatea $\rho = 2,7 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3}$ oscilează după legea $y = A \sin 10^3 \pi t$. Să se calculeze:

a) lungimea de undă,

b) distanţa de punctul O la care se găseşte primul punct al barei în care legea de mişcare este $y = A \sin\left(10^3 \pi t - \frac{\pi}{6}\right)$

Rezolvare

a) $u = \lambda \upsilon = \sqrt{\frac{E}{\rho}}; \lambda = \frac{1}{\upsilon}\sqrt{\frac{E}{\rho}}, \lambda \simeq 10,18m$.

b) $\frac{2\pi}{\lambda} x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{\lambda}{12} \simeq 0,84m$.

2. Un corp cu masa m=1kg, legat de un resort, este scos din poziţia de echilibru pe distanţa de 4cm, după care este lăsat liber să oscileze. în resort ia naştere o forţă elastică de 0, 16N. Să se calculeze factorul de amortizare δ , ştiind că după 10s amplitudinea mişcării devine de 10 ori mai mică şi să se scrie legea de mişcare în acest caz luând ca origine a coordonatelor, poziţia de echilibru şi ca origine a timpului, momentul în care corpul este lăsat liber.

Rezolvare

Din $A = A_0 e^{-\delta t}$ *se găseşte* $\delta = \frac{1}{t} \ln \frac{A_0}{A} = \frac{1}{t} \ln 10 = \frac{1}{t} \cdot 2,3 \log 10 = 0,23 s^{-1}$

adnotații……

Legea de mișcare este $x = A_0 e^{-\delta t}\sin(\omega t + \varphi)$, *unde*

$\delta = 0,23s^{-1}, A_0 = 4cm, \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \delta^2} = \sqrt{\frac{F_0}{mA_0} - \delta^2} = 66,6s^{-1},$

$\varphi = \frac{\pi}{4}$ *(la* $t = 0, x = A_0$*)*

$$x = 4e^{-0,3t}\sin\left(66,6t + \frac{\pi}{4}\right)cm$$

3. Două coarde din același material au aceeași lungime și sunt supuse la aceeași tensiune F. în ce raport se află perioadele lor proprii de oscilație, dacă diametrul unei coarde este de două ori mai mare decât diametrul celeilalte?

Rezolvare

$$\upsilon_1 = \frac{v_1}{\lambda} = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{F}{\mu_1}} = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{F}{\rho S}} = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{4F}{\pi\rho d_1^2}}$$

$$\upsilon_2 = \frac{v_2}{\lambda} = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{4F}{\pi\rho d_2^2}}$$

$$\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = \frac{d_2}{d_1}; dacă \;\; d_2 = 2d_1, \upsilon_1 = 2\upsilon_2$$

4. Vibrația modului fundamental pentru o coardă de lungime l în care tensiunea este egală cu F, este descrisă de ecuația $y(x,t) = A\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)\cos\omega t$ în care l este lungimea corzii iar x este abscisa unui punct oarecare de pe coardă. Să se determine energia de vibrație a corzii.

Rezolvare

Fie un element de pe coardă cu masa $dm = \mu \cdot dx$, *unde* μ *este masa unității de lungime a elementului de lungime dx.*

Viteza acestui element este

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)\sin\omega t$$

iar viteza maximă $v_{\max} = -\omega A\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$

Energia de vibrație a corzii va fi energia cinetică maximă a acesteia

$$dW = \frac{1}{2}\mu \cdot dx\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2\sin^2\left(\frac{\pi x}{l}\right)dx$$

adnotaţii ……..

$$W=\frac{1}{2}\mu\omega^2A^2\int_0^l\sin^2\left(\frac{\pi x}{l}\right)dx=\frac{1}{4}\omega^2A^2\mu l \qquad cu \qquad \omega=2\pi\upsilon=\frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{F}{l}},$$

$$W=\frac{\pi^2A^2F}{4l}$$

5. Două unde sinusoidale plane, având vitezele v_1 şi v_2 şi lungimile de undă λ_1 şi λ_2, se propagă după aceeaşi direcţie şi în acelaşi sens.

a) Să se afle viteza u de deplasare în spaţiu a locului în care oscilaţiile fiecărei unde sunt în fază.

b) Să se afle distanţa Δ între două puncte consecutive din spaţiu, pentru care diferenţa de fază dintre cele două unde creşte cu 2π.

Rezolvare

Ecuaţiile celor două unde sunt

$$y_1=A_1\sin 2\pi\left(\frac{v_1}{\lambda_1}t-\frac{x}{\lambda_1}\right)$$

$$y_2=A_2\sin 2\pi\left(\frac{v_2}{\lambda_2}t-\frac{x}{\lambda_2}\right)$$

a) În punctul de coordonată x cele două faze coincid, deci

$$\frac{v_1}{\lambda_1}t-\frac{x}{\lambda}=\frac{v_2}{\lambda_2}t-\frac{x}{\lambda_2},\ x=\frac{\frac{v_1}{\lambda_1}-\frac{v_2}{\lambda_2}}{\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_2}}t$$

Viteza de deplasare a acestui punct va fi

$$u=\frac{dx}{dt}=\frac{v_1\lambda_2-v_2\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}$$

Scriem că diferenţa de fază între punctele de coordonate x şi $x+\Delta$ *variază de la* φ *la* $\varphi+2\pi$ *;atunci*

$$2\pi\left(\frac{v_1}{\lambda_1}t-\frac{x}{\lambda_1}\right)-2\pi\left(\frac{v_2}{\lambda_2}t-\frac{x}{\lambda_2}\right)=\varphi$$

$$2\pi\left(\frac{v_1}{\lambda_1}t-\frac{x+\Delta}{\lambda_1}\right)-2\pi\left(\frac{v_2}{\lambda_2}t-\frac{x+\Delta}{\lambda_2}\right)=\varphi+2\pi$$

Scăzând cele două ecuaţii, se obţine

$$\Delta=\frac{\lambda_1\cdot\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}$$

adnotații……

6. Mişcarea unui arc elicoidal are legea de mişcare $x=\frac{5}{2}\left(\sqrt{3}\sin 2\pi t+\cos 2\pi t\right)$ m. Se cere:

a) Să se arate că această mişcare este oscilatorie armonică şi să se determine elementele mişcării;

b) Care este viteza unui punct al arcului după timpul $t=\frac{1}{2}$ s ?

Rezolvare

Legea de mişcare a unei oscilaţii armonice este:

$$x=A\cdot\sin\left(\omega t+\varphi\right)=A\left(\sin\omega t\cdot\cos\varphi+\sin\varphi\cdot\cos\omega t\right)$$

Comparând cu legea de mişcare

$$x=\frac{5}{2}\left(\sqrt{3}\sin 2\pi t+\cos 2\pi t\right)\text{ m}$$

Se găseşte: $A=\frac{5}{2}$, $\varphi=\frac{\pi}{6}$, $\omega=2\pi$.

Pentru perioadă, respectiv frecvenţă, se găseşte:

$$\omega=\frac{2\pi}{T},\ T=\frac{2\pi}{\omega}=1\text{ s},\ \nu=\frac{1}{T}=1\text{ Hz}.$$

b). $v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\omega\cdot A\cdot\cos\left(\omega t+\varphi\right)=10\pi\cos\left(2\pi t+\frac{\pi}{6}\right)=10\pi\cos\frac{7\pi}{6}$ m/s

7. O bară cilindrică din oţel, încastrată la un capăt, având raza $r=1\text{cm}$ şi lungimea $l=1\text{m}$, este supusă la capătul liber acţiunii unei forţe de 100 N a cărei direcţie coincide cu axa de simetrie a barei. Presupunând că după înlăturarea forţei bara efectuează oscilaţii longitudinale şi cunoscând pentru oţel $E=1{,}9\cdot10^{11}\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ şi $\rho=8\cdot10^3\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, să se calculeze:

a) Viteza de propagare a oscilaţiilor în bară şi lungimea de undă corespunzătoare primului mod de vibraţie;

b) Energia de vibraţie a barei.

Rezolvare

a) $v=\sqrt{\frac{E}{\rho}}=4{,}86\cdot10^3\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$,

adnotaţii ……..

$\lambda = 4 \cdot l = 4\,\text{m}$

b) Din $W = \frac{1}{2} k \Delta l^2$, $F = k \Delta l$ *şi* $\Delta l = \frac{1}{E} \cdot \frac{F \cdot l}{S}$ *se obţine:*

$$W = \frac{1}{2} \cdot \frac{F^2 \cdot l}{E \cdot S} = \frac{1}{2} \cdot \frac{F^2 \cdot l}{E \cdot \pi \cdot r^2} = 8,3 \cdot 10^{-5}\ \text{J}$$

8. Un corp cu masa de 1kg legat de un resort, este scos din poziţia de echilibru pe distanţa de $4\ \text{cm}$, după care este lăsat liber. În resort ia naştere o forţă elastică de $0,16\,\text{N}$. Să se calculeze factorul de amortizare, ştiind că după 10 secunde amplitudinea mişcării devine de 10 ori mai mică şi să se scrie legea mişcării în acest caz, socotind ca origine a constantelor, potenţialul de echilibru şi ca origine a timpului, momentul în care punctul material este lăsat liber.

Rezolvare

Fie ecuaţia oscilaţiei libere amortizate:

$$x = A_0 \cdot \text{e}^{-\delta \cdot t} \sin(\omega t - \varphi)$$

Amplitudinea mişcării este $A = A_0 \cdot \text{e}^{-\delta \cdot t}$

unde A_0 *este amplitudinea iniţială. Avem:* $\frac{A_0}{A} = \text{e}^{\delta \cdot t}$;

$$\delta = \frac{1}{t} \ln \frac{A_0}{A} = \frac{1}{t} \cdot 2,3 \cdot \log \frac{A_0}{A} = \frac{2,3}{10} \log \frac{4}{0,4} = 0,23\,\text{s}^{-1}$$

Pulsaţia mişcării este:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = 66,6\ \text{s}^{-1}$$

Unde pulsaţia proprie a mişcării neamortizate este:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} = \frac{4000}{1} = 4000\ \text{s}^{-1}$$

În momentul când $x = 4$, *ecuaţia devine,*
$4 = 4 \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega t - \varphi)$, *iar* $t = 0$, *de unde:*

$$\sin \varphi = -1,\ \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

Deci, legea mişcării este:

$$x = 4 \cdot e^{-0,23 \cdot t} \sin\left(66,6 \cdot t + \frac{\pi}{2}\right).$$

adnotaţii……

9. De capătul liber al unui resort spiral (vertical) a cărui constantă elastică este $k = 10\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}$ este suspendat un corp cu masa $m = 0,2\,\mathrm{kg}$. Corpul este deplasat în jos faţă de poziţia de echilibru, prin întinderea resortului cu $y_0 = 10\,\mathrm{cm}$ după care este lăsat liber să oscileze. Oscilaţiile sunt amortizate, cu factorul de amortizare $\delta = 0,5$. Să se calculeze:

a) Perioada de oscilaţie,

b) Faza iniţială a mişcării, considerând ca moment iniţial momentul în care corpul este lăsat liber să oscileze $(\text{cu } v_0 = 0)$;

c) Cât la sută din energia iniţială se pierde datorită amortizării, după prima perioadă? Dar după trei perioade?

Rezolvare

a). $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m} = 50$, $\delta^2 = 0,25$, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = 7,053$

$T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 0,8908$

b). Ecuaţia mişcării este: $y = a_0 \cdot \mathrm{e}^{-\delta\cdot t} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ *pentru* $t = 0$, $10 = a_0 \cdot \sin\varphi$

viteza la momentul t *este:*

$v = \dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = a_0 \cdot \omega \cdot \mathrm{e}^{-\delta\cdot t} \cdot \cos(\omega t + \varphi) - \delta \cdot a_0 \cdot \mathrm{e}^{-\delta\cdot t} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$

Care, pentru $t = 0$, *este* $v_0 = 0$ *de unde rezultă:*

$0 = a_0(\omega \cdot \cos\varphi - \delta \cdot \sin\varphi)$ *şi* $\mathrm{tg}\varphi = \dfrac{\omega}{\delta} = 14 = 85°55'$, $\sin\varphi = 0,99746$

$a_0 = \dfrac{10}{0,99746} = 10,027$ cm

c). energia oscilatorului la momentului iniţial este:

$E_0 = \dfrac{1}{2} k\, y_0^2 = \dfrac{1}{2} k\, a_0^2 \cdot \sin^2\varphi$

După o perioadă T, *energia este:*

$E_1 = \dfrac{1}{2} k\, a_0^2 \cdot \sin^2\varphi \cdot e^{-2\delta\cdot T}$

adnotaţii ……..

Iar după n perioade:

$$E_n = \frac{1}{2} k\, a_0^2 \cdot e^{-2n\cdot\delta\cdot T} \cdot \sin^2 \varphi$$

Energia disipată prin amortizare, după prima perioadă, este:

$$\Delta E_1 = E_0 - E_1 = \frac{1}{2} k\, a_0^2 \left(1 - e^{-2\delta\cdot T}\right) \cdot \sin^2 \varphi$$

Iar procentul de energie disipată este:

$$\frac{\Delta E_1}{E_0} = 1 - e^{-2\delta\cdot T} = 1 - e^{-T} = 1 - e^{-0,8908} = 1 - 0,41 = 0,59 = 59\%$$

După trei perioade, procentul de energie disipată este:

$$\frac{\Delta E_1}{E_0} = 1 - e^{-6\delta\cdot T} = 1 - e^{-3T} = 1 - e^{-2,437} = 1 - 0,069 = 0,931 = 93,1\%$$

10. Interferenţa undelor sonore poate fi studiată cu ajutorul unui tub Konig (figura 3.1) format din două ramuri $ABC = x_1$ şi $ADC = x_2$, ramura ADC putând culisa şi astfel putându-se modifica lungimea acesteia. Tubul este prevăzut cu două deschideri A şi B. Un diapazon care dă 1000 de vibraţii pe secundă vibrează la unul din capetele tubului (exemplu capătul A).

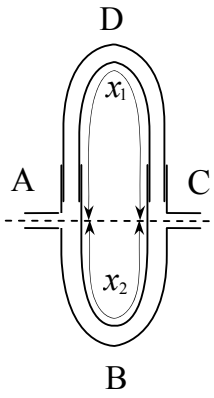


Figura 3.1

Cunoscând că acesta vibrează cu amplitudinea $A = 0,03$ cm să se calculeze:

a) Lungimea de undă a sunetului produs,

b) Ecuaţia undei rezultante la celălalt capăt al tubului în următoarele două cazuri:

b1) $\begin{cases} x_1 = 1\,\text{m} \\ x_2 = 1,34\,\text{m} \end{cases}$; b2) $\begin{cases} x_1 = 1\,\text{m} \\ x_2 = 1,17\,\text{m} \end{cases}$

Rezolvare

a). $\lambda = v \cdot T = 340 \cdot \frac{1}{10^3} = 0,34\,\text{m}$

b). Ecuaţia undei în punctul C *va fi:*

$y = b \cdot \sin(\omega t + \varphi)$

unde trebuie determinaţi b, ω *şi* φ.

Fie $y' = A \cdot \sin \omega t$ *atunci vibraţia la distanţa* x *de punctual de producere este:*

$$y' = A \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

b1). $b = \sqrt{A^2 + A^2 + 2A \cdot A \cdot \cos \Delta\varphi}$

unde:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi \cdot \Delta x}{\lambda} = \frac{2\pi \cdot (x_2 - x_1)}{\lambda} = \frac{2\pi \cdot 0,34}{0,34} = 2\pi$$

$$b = \sqrt{2A^2 (1 + \cos \Delta\varphi)} = A\sqrt{2(1 + \cos 2\pi)} = 2A$$

$$b = 2A = 0,06\,\text{cm}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{10^{-3}} = 5 \cdot 10^3 \pi\,;$$

$$\text{tg}\varphi = \frac{A \cdot \sin 0 + b \cdot \sin 2\pi}{A \cdot \cos 0 + b \cdot \cos 2\pi} = 0\,;\ \varphi = 0$$

Avem:

$$y = 2A \cdot \sin(5 \cdot 10^3 \pi t + 0);\ y = 0,06 \cdot \sin 5 \cdot 10^3 \pi t \text{ cm}$$

b2). $\Delta\varphi = \frac{2\pi \cdot \Delta x}{\lambda} = \frac{2\pi \cdot 0,17}{0,34} = \pi\,;$

$$b = \sqrt{2A^2 (1 + \cos 2\pi)} = 0$$

deci sunetul nu se aude.

11. Capătul liber al unui fir vertical de oţel, lung de $1m$, este supus la oscilaţii de tensiune. Care trebuie să fie frecvenţa minimă a oscilaţiilor pentru ca firul să se rupă, din cauza rezonanţei?

Se dă: $\rho = 7,8 \cdot 10^3\,\text{kg}/\text{m}^3$, $E = 2 \cdot 10^{11}\,\text{N}/\text{m}^2$.

La rezonanţă se îndeplineşte condiţia:

$l = \frac{\lambda}{4}$, $\lambda = 4 \cdot l = 4\ \text{m}$

adnotaţii……

✍ adnotaţii ……..

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{2\cdot 10^{11}}{7{,}8\cdot 10^{3}}} = 10^{4}\sqrt{\frac{2}{7{,}8}} = 5070 \text{ m/s}$$

$$\nu_0 = \frac{v}{\lambda} = \frac{5070}{4} = 1267{,}5\,\text{Hz}$$

12. Care este lungimea L a unei coarde, dacă la scurtarea ei cu $10\,\text{cm}$ frecvenţa oscilaţiilor creşte de 1,5 ori, tensiunea în coardă rămânând aceeaşi?

Rezolvare

$$\lambda = 2L$$

$$\nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{2L} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{F}{m}}$$

$$1{,}5\nu = \frac{1}{2(L-10)}\sqrt{\frac{F}{m}}$$

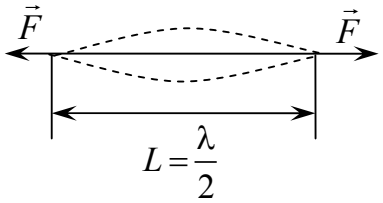


Figura 3.2

Din ultimele două egalităţi prin împărţire obţinem

$1{,}5(L-10) = L$, $L = 30\,\text{cm}$.

TEST DE AUTOEVALUARE

I.1. Reprezentarea şi compunerea oscilaţiilor poate fi făcută

a) doar analitic;

b) doar cu ajutorul numerelor complexe;

c) doar cu ajutorul fazorilor;

d) în toate cele trei moduri prezentate mai sus.

Justificaţi ✍……..

……

……

……

I.2. Frecvenţa mişcării întreţinute a unui oscilator este egală cu frecvenţa forţei din exterior

a) în tot timpul mişcării,

b) în timpul regimului tranzitoriu,

c) după încetarea regimului tranzitoriu,

d) în nici una din variantele a, b, c.

Justificaţi ✍……..
……
……
……

I.3. Fenomenul de rezonanţă se realizează atunci când:

a) oscilaţia este amortizată,

b) oscilaţia este forţată şi pulsaţia ω a forţei exterioare este legată de pulsaţia proprie ω_0 şi de factorul de amortizare δ prin relaţia $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$,

c) oscilaţia îndeplineşte condiţia $\delta \geq \omega_0$,

d) oscilaţia îndeplineşte condiţia $\delta = \omega$.

Justificaţi ✍……..
……
……
……

I.4. Care este relaţia între constanta elastică k a unui fir elastic cu lungimea l, secţiunea S şi modulul de elasticitate

a) $k = \frac{E \cdot S}{l}$;

b) $k = \frac{l}{E \cdot S}$;

c) $k = E \cdot S \cdot l$;

d) $k = E \cdot S \cdot l^2$.

Justificaţi ✍……..
……
……
……

✍ adnotaţii……
……
……

✍ adnotaţii ……..

I.5. Un punct material are o mişcare în jurul poziţiei de echilibru descrisă de legea $x = A\sin\omega t$. Care este semnificaţia mărimii A?

a) distanţa instantanee faţă de poziţia de echilibru;

b) distanţa maximă faţă de poziţia de echilibru;

c) distanţa medie faţă de poziţia de echilibru.

Justificaţi ✍……..
……
……
……

I.6. Un punct material cu masa $m = 10g$ oscilează după legea $x = 5\sin\frac{\pi}{6}t(cm)$ .Care este valoarea maximă a forţei care acţionează asupra punctului material?

Justificaţi ✍……..
……
……
……

I.7. Un oscilator cu masa $m = 1,6\cdot 10^{-2}kg$ oscilează după legea $x = 0,1\sin(\frac{\pi}{8}t + \frac{\pi}{8})$ m.Se cere:

a) perioada oscilaţiei;

b) viteza maximă a oscilatorului;

c) timpul în care oscilatorul parcurge distanţa de la $\frac{A}{2}$ la $\frac{\sqrt{3}}{2}A$.

Justificaţi ✍……..
……
……
……

I.8. Care este lungimea l a unei coarde,dacă la scurtarea ei cu 10 cm frecvenţa oscilaţiilor creşte de 1,5 ori;tensiunea în coardă rămîne aceeaşi.

Justificaţi ✍……..
……
……
……

I.9. O coardă de oţel cu densitatea $\rho = 7,7 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3}$ şi diametrul $D = 1mm$ este întinsă cu forţa $F = 100N$ .Care este valoarea vitezei de propagare a undelor transversale din coardă?

Justificaţi ✍……..
……
……
……

✍ adnotaţii……
……
……

Modulul II. ELECTRICITATE ŞI MAGNETISM

Obiectivele modului

- *Cunoaşterea noţiunilor de bază ale fenomenelor electrice şi magnetice*
- *Fenomene electrostatice*
- *Curentul electric continuu şi alternativ*
- *Magnetostatica*
- *Mişcarea particulelor încărcate electric în câmpuri electrice şi magnetice, aplicaţii*

Cuprins Modulul II

4. ELECTROSTATICA 49
4.1 Introducere 49
4.1.1 Despre interacţiune 49
4.1.2 Despre curenţi electrici 51
4.2 Legea lui Coulomb 52
4.3 Câmpul electric 54
4.4 Fluxul câmpului electric. Teorema lui Gauss 57
4.5 Lucrul mecanic al forţelor câmpului electric. Potenţialul electric 59
4.6 Substanţa în câmp electric 64
4.6.2 Polarizaţia electronică 68
4.6.3 Discontinuitatea vectorilor $\vec{D}$ şi $\vec{E}$ la suprafaţa de separaţie a doi dielectrici polarizaţi 71
4.6.4 Feroelectricitatea, piezoelectricitatea şi piroelectricitatea 75
4.7 Capacitatea electrică. Condensatoare 77
4.7.1 Condensatoare legate în serie 78
4.7.2 Condensatoare legate în paralel 79
4.8 Energia electrostatică 81
4.8.1 Energia electrostatică a unui sistem de sarcini punctuale 81
4.8.2 Energia electrostatică a distribuţiilor continue de sarcină 82
4.8.3 Energia electrostatică în funcţie de câmpul electric 82
5. ELECTROCINETICA 85
5.1 Curentul electric 85
5.2 Curentul electric în conductoare 88
5.2.1 Legea lui Ohm 88
5.2.2 Tensiunea electromotoare. Legea lui Ohm 91
5.2.3 Energia şi puterea în curent continuu 93
5.2.4 Teorema transferului maxim de putere 93
5.2.5 Reţele electrice (în curent continuu) 94
5.3 Curentul electric în gaze 96
5.4 Curentul electric în lichide 99
5.4.1 Introducere 99
5.4.2 Legile electrolizei 100

✍ adnotații ……

5.5 Curentul electric în semiconductori 102
5.5.1 Noţiuni generale 102
5.5.2 Semiconductori intrinseci 102
5.5.3 Semiconductori extrinseci 104
5.5.4 Densitatea curentului într-un semiconductor 107
5.6 Alte tipuri de curenţi electrici 109
5.6.1 Curentul optoelectronic 110
5.6.2 Curentul acustoelectric 110
5.6.3 Curentul termoelectric 110
5.6.4 Curenţi de emisie termoelectrică 110
5.6.5 Curenţi de deplasare 111
5.7 Generatoare electrice 111
5.7.1 Surse chimice de tensiune electromotoare. 111
5.7.2 Pile de combustie 113
5.7.3 Pile termoelectrice. 114
5.7.4 Celule solare 115
6. MAGNETOSTATICA 116
6.1 Câmpul magnetic al curentului electric 117
6.2 Forţe care acţionează într-un câmp magnetic 120
6.2.1 Forţa Lorentz 120
6.2.2 Forţa electromagnetică 120
6.2.3 Forţa electrodinamică 121
6.3 Substanţa în câmp magnetic 121
7. MIŞCAREA PARTICULELOR ÎN CÂMPURI ELECTRICE ŞI MAGNETICE 126
7.1 Introducere 126
7.2 Mişcarea în câmp electric static 126
7.3 Mişcarea în câmp magnetic 127
7.3.1 Mişcarea în câmp magnetic transversal şi omogen 127
7.3.2 Mişcarea în câmp magnetic omogen 128
7.4 Aplicaţii 129
7.4.1 Filtre de viteze 129
7.4.2 Tubul catodic 132
7.4.3 Spectrometrul de masă 133
7.4.4 Determinarea sarcinii specifice a electronului 134
7.4.5 Acceleratoare de particule 136
7.4.6 Elemente de optică electronică 140
8. PROBLEME. MODELE OPERAŢIONALE 143
TEST DE AUTOEVALUARE 173
BIBLIOGRAFIE 178
RĂSPUNSURI TEST AUTOEVALUARE 178

adnotații……

4. ELECTROSTATICA

4.1 Introducere

4.1.1 Despre interacțiune

Fenomenele electrice şi magnetice au loc în regiuni ale spațiului numite câmpuri. *Câmpul electric* poate fi produs într-o regiune a spațiului fie aducând sarcini electrice în regiunea în care urmează să se producă câmpul, fie folosind în acea regiune un câmp magnetic a cărui valoare variază în timp; câmpul electric îşi manifestă prezența prin forțe care se exercită asupra corpurilor încărcate electric. *Câmpul magnetic* poate fi produs într-o regiune a spațiului fie aducând magneți în regiunea în care urmează să se producă câmpul, fie lăsând să treacă curenți electrici în acea regiune, fie folosind în acea regiune un câmp electric a cărui valoare variază în timp; câmpul magnetic îşi manifestă prezența prin forțe care se exercită asupra corpurilor parcurse de curenți electrici macroscopici sau moleculari. *Câmpul electromagnetic* este un ansamblu de două câmpuri, unul electric şi altul magnetic, care se generează reciproc, coexistând în acelaşi loc şi timp, câmpul electric (componentă a câmpului electromagnetic) luând naştere la orice variație a câmpului magnetic sau în timpul apariției acestuia, iar câmpul magnetic luând naştere la variația câmpului electric.

Din cele arătate se observă că originile câmpurilor menționate, din punctul de vedere al teoriei macroscopice, constau într-o distribuție de sarcini şi curenți electrici. Sarcina electrică este o mărime fizică ce caracterizează stările de electrizare a corpurilor. Se numeşte stare de electrizare a unui corp acea stare specială în care corpul respectiv este capabil să exercite forțe electrice asupra altor corpuri. Astfel de stări de electrizare se pot obține în diferite moduri: prin frecare, prin contact cu un corp electrizat, prin efecte chimice, prin încălzire, prin iradiere cu radiații emise de substanțe radioactive, prin întindere sau compresiune etc.

✍ adnotații ……

Sarcinile electrice sunt de două feluri: pozitive şi negative. S-a stabilit că sarcina electrică a unui corp (q) nu poate lua decât valori distincte, multipli întregi ai unei sarcini elementare (e), care este unitatea naturală pentru sarcina electrică:

$$q = \pm n \cdot e, \quad n = 1, 2, 3.....$$

Valoarea absolută a unității naturale de sarcină electrică este, în sistemul internațional, egală cu $e = 1,6021 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$; coulombul (simbol C) este unitatea de măsură pentru sarcina electrică. Particulele care au sarcină electrică egală cu e sunt electronul (cu sarcina $-e$), protonul şi pozitronul (cu sarcina $+e$) etc.

Sarcina electrică are trei proprietăți fundamentale:

sarcina electrică se conservă;

sarcina electrică este cuantificată;

sarcina electrică este relativist invariantă.

Spunem că un corp este încărcat electric dacă numărul sarcinilor elementare de un anumit semn este mai mare decât numărul sarcinilor elementare de semn opus din acel corp. Experiențele au arătat că cele două feluri de electricitate apar în acelaşi timp şi în cantități egale. *Deci, într-un sistem fizic izolat, suma algebrică a sarcinilor electrice repartizate în diferitele puncte ale sistemului este constantă* . Aceasta este legea conservării sarcinilor electrice.

caracteristică fundamentală a materiei, fie ea sub formă de câmp sau de substanță, este discontinuitatea ei. Cele mai mici entități din care este formată materia se numesc particule "elementare" . Toate particulele elementare cunoscute până în prezent au numai trei valori posibile ale sarcinii electrice: $+e$, 0 sau $-e$. Aşa cum s-a arătat mai sus sarcina electrică a oricărui corp este un multiplu întreg al sarcinii elementare: $q = \pm n \cdot e, n = 1, 2, 3.$

Sarcina elementară a corpurilor este relativist invariantă. Doi observatori, unul în repaus față de sarcina electrică şi altul în mişcare față de ea, măsoară una şi aceeaşi valoare a sarcinii electrice.

Sarcinile electrice pot fi considerate punctiforme sau pot fi distribuite liniar, superficial şi în volum. Dacă o sarcină electrică Δq este distribuită liniar pe o lungime Δl atunci densitatea liniară de sarcină electrică (λ)este dată de

$$\lambda = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{\mathrm{d}\, q}{\mathrm{d}\, l}. \qquad (4.1)$$

adnotații……

Analog densitatea superficială de sarcină electrică (σ) şi cea volumică (ρ) sunt date de expresiile:

$$\sigma = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}S},\ \rho = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}V}. \tag{4.2}$$

4.1.2 Despre curenți electrici

Mişcarea ordonată a sarcinilor electrice constituie *curenți electrici*. Curentul electric este caracterizat printr-o mărime fizică denumită intensitate a curentului electric. Prin intensitate I a curentului electric care trece printr-o suprafață elementară dată, se înțelege o mărime fizică care se măsoară prin cantitatea de electricitate ce trece prin acea suprafață în unitatea de timp:

$$I = \lim_{\Delta t \to o} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}. \tag{4.3}$$

În Sistemul Internațional (S.I.), unitatea de intensitate a curentului electric este amperul (simbol A). "Curgerea" cantității de electricitate poate fi reprezentată

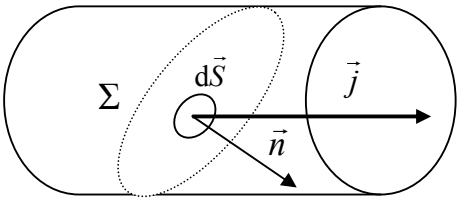


Figura 4.1

printr-un vector ($\vec{j}$), îndreptat de-a lungul mişcării sarcinilor electrice şi având modulul egal cu cantitatea de electricitate care traversează în unitatea de timp unitatea de suprafață normală pe direcția de curgere

$$I = \int_{\Sigma} \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_{\Sigma} \vec{j} \cdot \mathrm{d}S \cdot \vec{n}, \tag{4.4}$$

unde $\vec{n}$ este versorul normalei la suprafața $\mathrm{d}S$ prin care trec sarcinile electrice (vezi figura 1.).

În funcție de variația mărimilor care descriu fenomenele electromagnetice, din teoria macroscopică se disting următoarele patru regimuri:

adnotații ……..

regimul static, în care mărimile nu variază în timp, nu se produc transformări energetice, fenomenele electrice se produc independent de cele magnetice, iar cele două câmpuri (electric şi magnetic) se pot studia separat;

regimul staționar, în care mărimile nu variază în timp, dar spre deosebire de regimul static, interacțiunile câmpului cu substanța sunt însoțite de transformări electrice;

regimul cvasistaționar, în care mărimile variază suficient de lent pentru a se putea neglija radiația câmpului electromagnetic;

regimul nestaționar sau variabil, în care mărimile variază în timp, în cazul cel mai general.

Se va începe cu studiul regimului static care face obiectul electrostaticii.

4.2 Legea lui Coulomb

În anul 1785 Coulomb a stabilit că două sarcini electrice punctiforme q_1 şi q_2 (figura 4.2) interacționează cu o forță proporțională cu produsul sarcinilor, invers proporțional cu pătratul distanței dintre ele şi este dirijată după dreapta

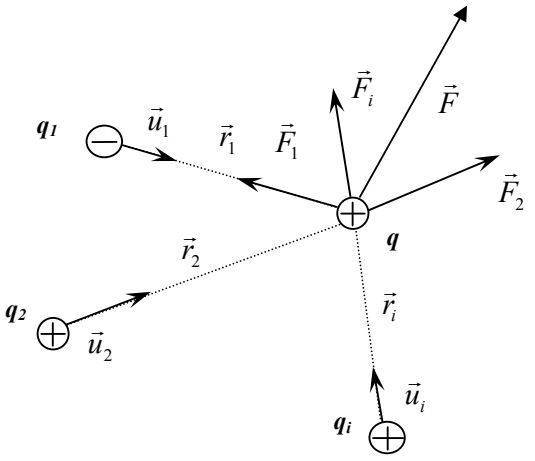


Figura 4.2

care unește cele două sarcini

$$\vec{F}_{12}=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q_1q_2}{r^2}\vec{u}_{12}=-\vec{F}_{21}. \qquad (4.5)$$

adnotații……

Din expresia (4.5), cunoscută sub numele de formula lui Coulomb, rezultă că dacă produsul $q_1 q_2 > 0$, adică ambele sarcini au acelaşi semn, $\vec{F}_{12}$ este orientată în direcţia versorului $\vec{u}_{12}$ şi tinde să respingă sarcina q_2 faţă de sarcina q_1. Dacă însă produsul $q_1 q_2 < 0$, adică sarcinile au semn opus, atunci forţa $\vec{F}_{12}$ este orientată în sens opus versorului $\vec{u}_{12}$ şi atrage sarcina q_2 spre q_1. Formula (4.5) se aplică numai pentru sarcinile punctiforme sau altfel spus pentru sarcini ale căror dimensiuni sunt neglijabile în raport cu distanţa r dintre ele.

În expresia (4.5) mărimea fizică ε ($\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$) poartă numele de permitivitate (constantă dielectrică) a mediului în care se află cele două sarcini şi caracterizează proprietăţile electrice ale mediului; ε_r este permitivitatea relativă a mediului iar $\varepsilon_o = 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F \cdot m^{-1}}$ este permitivitatea absolută a vidului.

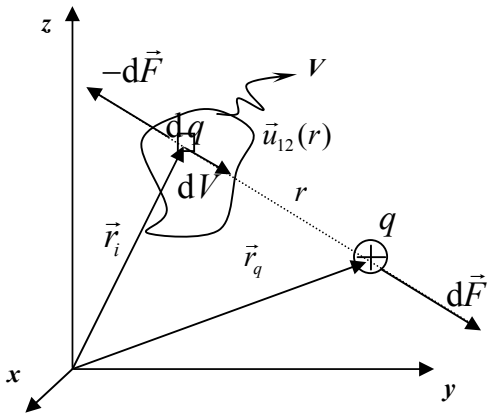


Figura 4.3

Dacă într-o regiune a spaţiului se găsesc, în repaus, mai multe sarcini electrice punctiforme $q_1, q_2, ..., q_n$ atunci forţa cu care acţionează acestea asupra sarcinii punctiforme fixe q este (figura 4.2):

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \frac{q}{4\pi\varepsilon} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_i \,. \qquad (4.6)$$

La găsirea acestei forţe se aplică principiul superpoziţiei (a independenţei acţiunii forţelor).

✍ adnotații ……

Dacă sarcinile electrice au o distribuție în volum cu densitatea ρ atunci se poate delimita un volum infinitezimal $\mathrm{d}V$ astfel încât sarcina din interiorul acestuia, $\mathrm{d}q = \rho\,\mathrm{d}V$, să poată fi considerată punctiformă. Conform legii lui Coulomb (4.5) sarcina $\mathrm{d}q$ acționează asupra sarcinii q cu o forță (figura 4.3):

$$\mathrm{d}\vec{F}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{q\,\mathrm{d}q}{r^2}\vec{u}(r)\,. \tag{4.7}$$

Integrând (4.7) după tot volumul V în care se găseşte sarcina electrică, se găseşte forța de interacțiune dintre densitatea volumică de sarcină şi sarcina q

$$\vec{F}(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\int_V \frac{\rho(r_i)\,\mathrm{d}V}{r^2}\vec{u}(r)\,. \tag{4.8}$$

Dacă densitățile de sarcină electrică sunt superficiale σ sau liniare λ atunci expresia (4.8) devine:

$$\vec{F}(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\int_S \frac{\sigma(r_i)\,\mathrm{d}S}{r^2}\vec{u}(r)\,, \tag{4.9}$$

$$\vec{F}(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\int_\Gamma \frac{\lambda(r_i)\,\mathrm{d}l}{r^2}\vec{u}(r)\,, \tag{4.10}$$

unde $\mathrm{d}S$ este elementul de suprafață de pe suprafața S pe care este distribuită sarcina electrică cu densitatea superficială σ iar $\mathrm{d}l$ este elementul de lungime de pe curba Γ pe care este distribuită sarcina electrică cu densitatea liniară λ.

4.3 Câmpul electric

Faptul că între sarcinile electrice apar forțe de interacțiune arată că spațiul din jurul unei sarcini electrice capătă o însuşire specială şi anume, că asupra oricărei sarcini electrice introduse în acest spațiu se exercită acțiuni care se manifestă sub formă de forțe pe care le numim *forțe electrice*. Se înțelege deci prin *câmp electric* (electrostatic) spațiul din jurul unei sarcini electrice sau distribuții de sarcini electrice în care se manifestă existența forțelor electrice.

Intensitatea câmpului electric într-un punct oarecare al acestuia este o mărime fizică numeric egală cu forța care acționează asupra unității de sarcină electrică pozitivă situată în acel punct şi având orientarea forței

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}\,. \tag{4.11}$$

Într-adevăr din (4.5) se poate scoate expresia

adnotații……

$$\vec{F}_{12} = q_2 \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{q_1}{r^2} \vec{u}_{12} = q_2 \vec{E}_1 , \qquad (4.12)$$

unde

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{q_1}{r^2} \vec{u}_{12} , \qquad (4.13)$$

reprezintă intensitatea câmpului electric generat de sarcina electrică

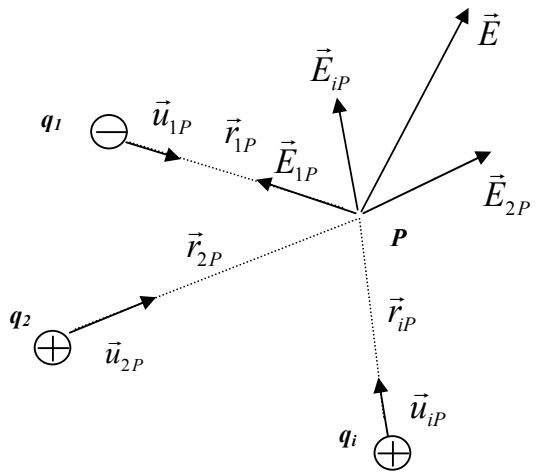


Figura 4.4

punctiformă q_1 la distanța r în punctul în care se găseşte sarcina q_2; modulul este însă acelaşi în orice punct situat la distanța r.

Pentru o multitudine de sarcini electrice punctiforme fixe $q_1, q_2, ..., q_n$, câmpul electric într-un punct P (figura 4.4) este dat de expresia

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{q_i}{r_{iP}^2} \vec{u}_{iP} . \qquad (4.14)$$

Pentru distribuții continue de sarcină electrică se obține (pornind de la (4.11) şi (4.8), (4.9) şi (4.10))

$$\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_V \frac{\rho(r_i)\,\mathrm{d}V}{r^2} \vec{u}(r) \text{ (distribuție volumică),} \qquad (4.15)$$

$$\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_S \frac{\sigma(r_i)\,\mathrm{d}S}{r^2} \vec{u}(r) \text{ (distribuție superficială),} \qquad (4.16)$$

$$\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_\Gamma \frac{\lambda(r_i)\,\mathrm{d}l}{r^2} \vec{u}(r) \text{ (distribuție liniară).} \qquad (4.17)$$

adnotații ……..

Din formula de definiție a intensității câmpului electric (4.11), se observă că acesta este un câmp vectorial. Aceasta înseamnă că fiecărui punct al câmpului i se poate ataşa un vector. Dacă alegem ca sarcină de probă o sarcină electrică pozitivă unitate, $q = +1$, atunci conform cu (4.11), forța cu care acționează câmpul asupra ei este egală numeric cu intensitatea câmpului.

Curbele la care sunt tangenți vectorii câmpului se numesc linii de câmp. Intuitiv, pot fi înțelese aceste linii şi făcând următorul raționament: dacă într-un câmp electric se introduce o sarcină punctiformă infinit de mică (pentru ca

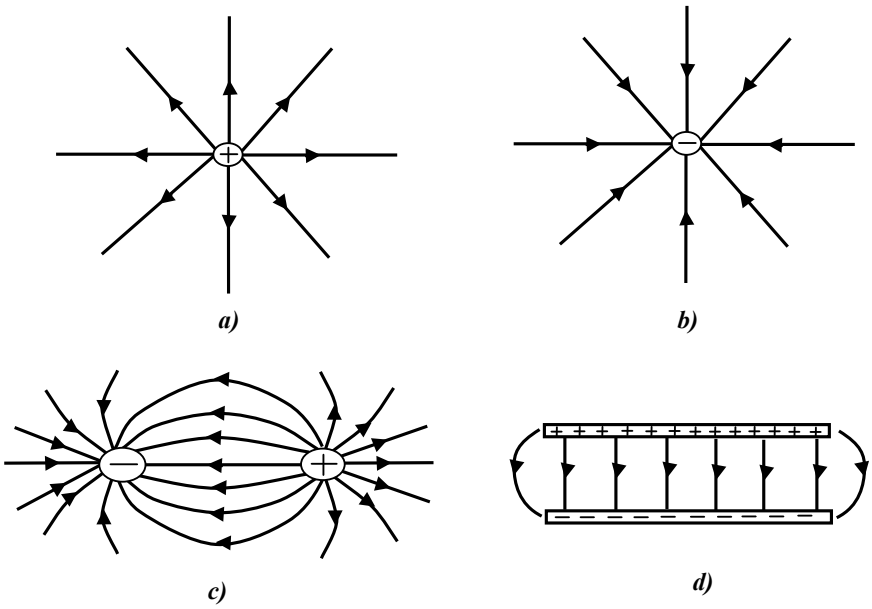


Figura 4.5

propriul ei câmp electric să nu modifice câmpul în care a fost introdusă) şi dacă această sarcină ar fi lăsată să se deplaseze infinit de încet, în fiecare moment sub acțiunea forțelor electrice, atunci această sarcină ar descrie o traiectorie numită linie de câmp. O linie de câmp este caracterizată printr-un sens care, convențional, este sensul de deplasare al unei sarcini electrice pozitive introduse în câmp. Deci liniile de câmp electric pornesc din sarcinile electrice pozitive şi se termină în sarcinile electrice negative (figura 4.5).

adnotații……

4.4 Fluxul câmpului electric. Teorema lui Gauss

Fluxul câmpului electric printr-o suprafață S se definește prin expresia (figura 4.6):

$$\Psi_S = \int_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_S \vec{E}\cdot(\mathrm{d}S\vec{n}) = \int_S E\,\mathrm{d}S\cos(\widehat{\vec{E},\vec{n}})\,, \qquad (4.18)$$

unde $\vec{n}$ este versorul normalei la elementul de suprafață $\mathrm{d}S$.

Altfel spus se numește flux electric printr-o suprafață, o mărime numeric egală cu numărul liniilor de câmp care trec prin acea suprafață.

Pentru fluxul câmpului electric este valabilă legea lui Gauss a cărui enunț este următorul Fluxul intensității câmpului electric printr-o suprafață închisă de

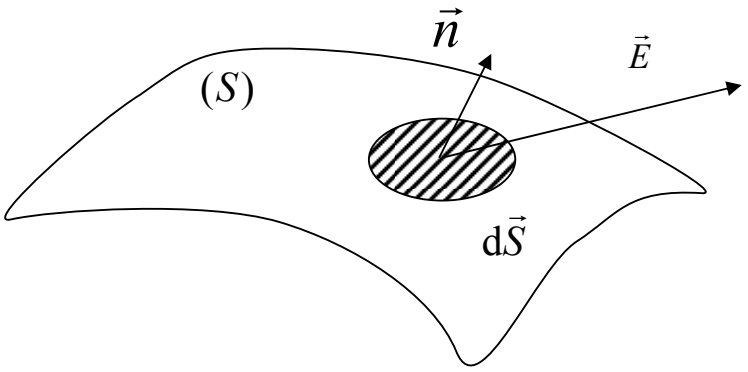


Figura 4.6

formă arbitrară este numeric egal cu q/ε_0 unde q este sarcina electrică din interiorul suprafeței și este egal cu zero atunci când q este în exteriorul acesteia.

Într-adevăr, să considerăm o sarcină electrică q situată în interiorul unei suprafețe oarecare S (figura 4.7)

Fluxul câmpului electric prin suprafața S este

$$\Psi_S = \oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_S E\,\mathrm{d}S\cos\alpha = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S \frac{\mathrm{d}S\cos\alpha}{r^2}$$
$$\Psi_S = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S \mathrm{d}\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}4\pi = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad (4.19)$$

Dacă în interiorul suprafeței se găsesc mai multe sarcini electrice atunci (4.19) se scrie astfel

adnotații ……..

$$\Psi_S = \oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} q_i \,. \tag{4.20}$$

Dacă sarcina electrică punctuală se află pe suprafața închisă S atunci făcând un calcul asemănător celui dat de (4.19) unde, se obține $\Psi_S = q / 2\varepsilon_0$.

Pentru cazul sarcinii electrice q situată în exteriorul suprafeței închise S (figura 4.8), fluxul câmpului electric din unghiul solid $\mathrm{d}\Omega$ va fi dat de suma

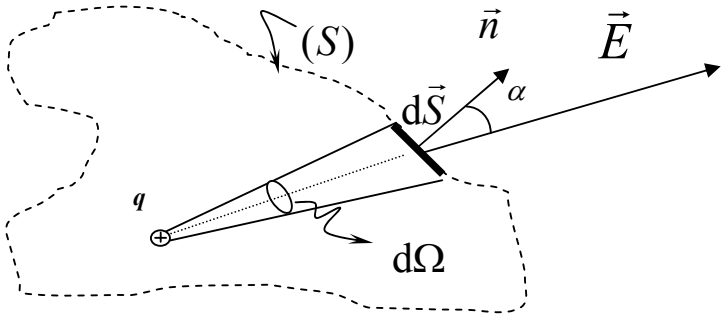


Figura 4.7

dintre fluxul prin suprafața $\mathrm{d}S$ şi fluxul prin suprafața $\mathrm{d}S'$:

$$\Psi_S = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\mathrm{d}S \cos\beta}{r^2} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\mathrm{d}S' \cos\alpha}{r'^2}, \tag{4.21}$$

$$\Psi_S = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int (-\mathrm{d}\Omega) + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int \mathrm{d}\Omega = 0 \,.$$

Teorema lui Gauss (4.19) şi formula lui Coulomb servesc la calculul câmpului electric (vezi anexa 1).

Dacă se consideră o distribuție spațială de sarcină electrică cu densitatea ρ atunci din (4.19) se obține

$$\Psi_S = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} \int_V \rho \, \mathrm{d}V \,, \tag{4.22}$$

unde V este volumul din interiorul suprafeței închise S.

Utilizând teorema Green-Ostrogradski:

$$\Psi_S = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_V \mathrm{div}\, \vec{E} \, \mathrm{d}V \,, \tag{4.23}$$

din (4.22) şi (4.23) rezultă:

$$\mathrm{div}\, \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \; (\text{sau } \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}) \,. \tag{4.24}$$

adnotații……

Expresia (4.24) este *formula locală* sau *diferențială a teoremei lui Gauss*.

Deoarece operatorul ∇ în coordonate carteziene are forma

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \text{ şi } \vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k},$$

expresia (4.24) se mai poate scrie şi astfel:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon}. \qquad (4.25)$$

Expresiile (4.24) sau (4.25) arată că sursele câmpului electrostatic sunt sarcinile electrice (statice).

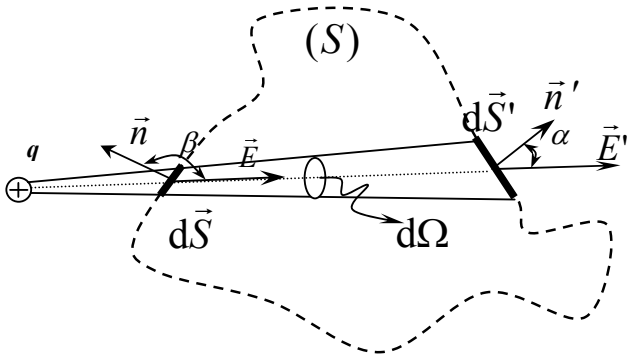


Figura 4.8

În punctele din spațiu în care nu există sarcini electrice, adică $\rho(x, y, z) = 0$, ecuația (4.24) devine

$$\operatorname{div}\vec{E} = 0, \qquad (4.26)$$

relație care poartă numele de ecuația lui Laplace.

În concluzie, dacă într-un punct $\rho = 0$, atunci $\operatorname{div}\vec{E} = 0$ şi din acest punct nu pornesc linii de câmp iar dacă într-un punct $\operatorname{div}\vec{E} = \rho/\varepsilon \neq 0$, acel punct reprezintă o sursă de câmp electric.

4.5 Lucrul mecanic al forțelor câmpului electric. Potențialul electric

Dacă o sarcină electrică se află într-un câmp electric (figura 4.9.), atunci asupra acesteia acționează forța electrică $\vec{F} = q\vec{E}$.

adnotații ……..

Să considerăm o sarcină electrică pozitivă $+q'$ care se deplasează în câmpul electric produs de sarcina pozitivă $+q$ (figura 4.10.).

Lucrul mecanic elementar $\mathrm{d}L$ efectuat de forța electrică la deplasarea sarcinii q' pe distanța $\mathrm{d}l$ este

$$\mathrm{d}L = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = F\,\mathrm{d}l\cos\alpha = F\,\mathrm{d}r = q'E\cdot\mathrm{d}r\,. \qquad (4.27)$$

Dacă se consideră sarcina electrică pozitivă unitate ($q'=+1$) care se deplasează în câmp, atunci

$$\mathrm{d}L_{q'=1} = \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = E\cdot\mathrm{d}r = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{q}{r^2}\mathrm{d}r\,. \qquad (4.28)$$

Integrând (4.28) se găseşte lucrul mecanic efectuat între punctele A şi B:

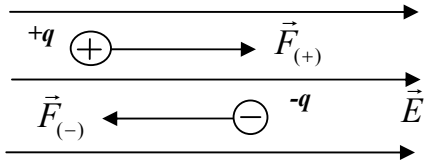


Figura 4.9

$$L_{AB(q'=1)} = \int_A^B \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\cdot\int_{r_A}^{r_B}\frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}\right). \qquad (4.29)$$

Pentru o sarcină q' oarecare acelaşi lucru mecanic este

$$L_{AB} = \frac{q'q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}\right) = q'\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon r_A}-\frac{q}{4\pi\varepsilon r_B}\right). \qquad (4.30)$$

Din expresiile (4.29) şi (4.30) se observă că lucrul mecanic nu depinde (pentru sarcini electrice date), decât de pozițiile inițială r_A şi finală r_B între care se deplasează sarcina q' şi nu depinde de drumul urmat între cele două poziții; *câmpul electric este un câmp conservativ de forțe*. Aceasta înseamnă că

$$\oint_\Gamma \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = 0 \qquad (4.31)$$

adică circulația vectorului intensitate a câmpului electric după o curbă închisă este egală cu zero (condiția de conservativitate a câmpului electrostatic).

Deoarece lucrul mecanic efectuat de câmpul electric depinde numai de pozițiile (coordonatele) inițială şi finală între care este deplasată sarcina electrică,

adnotații……

rezultă că acesta poate fi scris ca diferența între două numere care reprezintă valorile unei funcții scalare de coordonate numite *potențial electric* al câmpului electric. Într-adevăr (4.29) se mai scrie

$$L_{AB(q'=1)} = \int_A^B \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \frac{q}{4\pi\varepsilon r_A} - \frac{q}{4\pi\varepsilon r_B} = V_A - V_B = U_{AB}\,. \qquad (4.32)$$

În (4.32) mărimile V_A şi V_B reprezintă potențialele electrice în punctele A respectiv B iar U_{AB} se numeşte diferență de potențial sau tensiune.

Potențialul electric se măsoară, în S.I., în volți (simbol V).

Pentru a calcula potențialul într-un punct este necesar să se cunoască

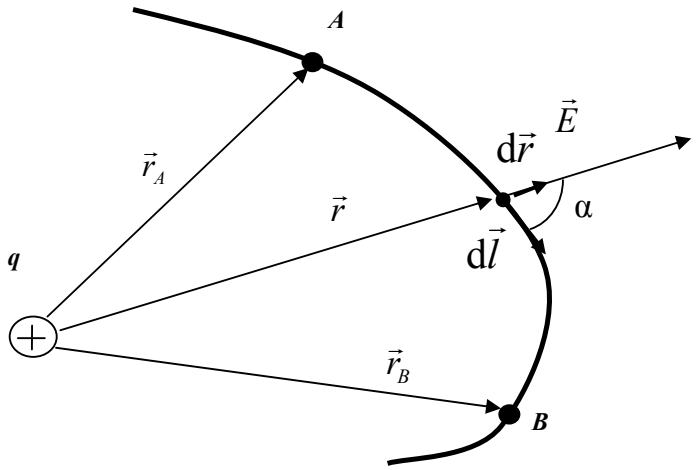


Figura 4.10

potențialul în alt punct . De aceea este necesar să se stabilească un potențial de referință. Pentru comoditate se ia ca potențial de referință, potențialul unui punct situat la o distanță infinită de sarcina care generează câmpul; în acest punct potențialul este nul. În acest fel din (4.32), pentru $r_B \to \infty$, rezultă

$$L_{A\infty} = \int_A^{\infty} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_A} = V_A\,. \qquad (4.33)$$

Deci, potențialul electric V_A într-un punct al câmpului electric este numeric egal cu lucrul mecanic efectuat de forțele electrice pentru a deplasa sarcina electrică unitate $q' = +1$ din acel punct la infinit. Reciproc, potențialul într-un punct al câmpului electric poate fi măsurat numeric prin lucrul mecanic

adnotații ……..

efectuat împotriva forțelor electrice pentru a aduce sarcina $q'=+1$ de la infinit în punctul respectiv

Pentru $q'\neq+1$ din (4.30) rezultă

$$L_{AB}=q'\left(V_A-V_B\right)=q'U_{AB}\,. \tag{4.34}$$

Dacă într-o regiune a spațiului se găsesc corpuri încărcate cu sarcini electrice

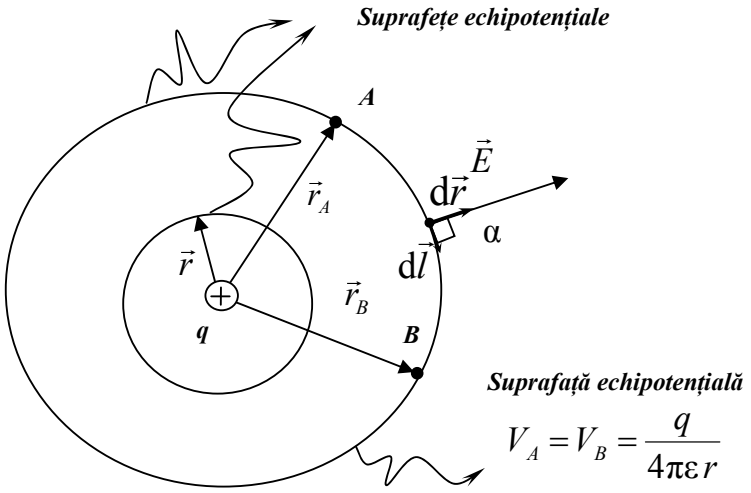


Figura 4.11

repartizate cu densități de volum ρ, de suprafață σ, de linie λ, precum şi corpuri cu sarcini discrete, potențialul electrostatic într-un punct oarecare din câmp are valoarea dată de superpoziția potențialelor tuturor sarcinilor în acel punct (în vid),

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_V\frac{\rho\,dV}{r}+\int_S\frac{\sigma\,dS}{r}+\int_\Gamma\frac{\lambda\,dl}{r}+\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i}\right]. \tag{4.35}$$

Deoarece câmpul electrostatic este un câmp conservativ rezultă că vectorul intensitate a câmpului electric $\vec{E}$ este gradientul unui câmp de scalari. Într-adevăr dacă în relația (4.32) se ia $V_B=V_0=ct.$ ca potențial de referință (la infinit $V_0=0$) iar $V_A=V$ este potențialul în punctul A, obținem

$$V-V_0=\int_A^B\vec{E}\cdot d\vec{l}\,, \tag{4.36}$$

sau

adnotații……

$$V = V_0 - \int_B^A \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \ .$$

Diferențiind (4.36), deoarece $V_0 = ct$, se obține

$$\mathrm{d}V = -\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \ . \qquad (4.37)$$

În coordonate carteziene pentru $\vec{E}$ şi $\mathrm{d}\vec{l}$ avem:

$$\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k} \ , \qquad (4.38)$$

$$\mathrm{d}\vec{l} = \mathrm{d}\,x\vec{i} + \mathrm{d}\,y\vec{j} + \mathrm{d}\,z\vec{k} \ ,$$

care introduse în (4.27) conduc la expresia

$$\mathrm{d}V = -\left(E_x\,\mathrm{d}\,x + E_y\,\mathrm{d}\,y + E_z\,\mathrm{d}\,z\right). \qquad (4.39)$$

Din (4.39) se deduce că potențialul V este o funcție de x, y, z, adică $V = V(x, y, z)$. Diferențiala totală pentru acesta este

$$\mathrm{d}V = \frac{\partial V}{\partial x}\mathrm{d}\,x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathrm{d}\,y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathrm{d}\,z \,. \qquad (4.40)$$

Comparând (4.39) şi (4.40) se obțin componentele intensității câmpului electric:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}; E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}; E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}. \qquad (4.41)$$

Din (4.41) rezultă

$$\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{y} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}\right) =$$

$$= -\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{y} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)V = -\nabla V \equiv -\,\mathrm{grad}\,V \ . \qquad (4.42)$$

Expresia (4.42) ne arată că intensitatea câmpului electrostatic $\vec{E}$ derivă dintr-un potențial scalar V şi că vectorul $\vec{E}$ este orientat în sensul în care potențialul electric scade; de asemenea această expresie reprezintă legătura dintre câmp şi potențial.

În plus trebuie menționat că vectorul $\vec{E}$ este perpendicular pe suprafețele echipotențiale. Prin suprafață echipotențială se înțelege locul geometric al punctelor dintr-un câmp electric care au acelaşi potențial (figura 4.11.).

Pentru cazul prezentat în figura 4.11 se poate scrie:

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_A^B E\,\mathrm{d}\,l\cos\alpha = V_A - V_B = 0 \,. \qquad (4.43)$$

adnotații ……..

Deoarece $E \neq 0$, $\mathrm{d}l \neq 0$ rezultă $\cos\alpha = 0$ şi $\alpha = \pi/2$, adică vectorul $\vec{E}$ este perpendicular pe suprafața echipotențială. Expresia (4.31) exprimă condiția de conservativitate a câmpului electrostatic. Urmărim scrierea acestei condiții sub formă diferențială. În acest scop apelăm la teorema lui Stokes

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{S} \mathrm{rot}\, \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}\,, \qquad (4.44)$$

unde S este suprafața delimitată de curba Γ.

Din (4.31) şi (4.44) rezultă:

$$\mathrm{rot}\ \vec{E} = 0 \ \text{ sau } \ \nabla \times \vec{E} = 0\,. \qquad (4.45)$$

Ecuația (4.45) arată că un câmp electrostatic este un câmp fără rotor (irotațional) în care liniile de câmp pornesc din sarcinile pozitive şi se opresc pe sarcinile negative.

În coordonate carteziene, ecuația (4.45) are următoarea formă

$$\nabla \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\vec{k} = 0\,. \qquad (4.46)$$

Observație: În capitolele care vor urma vom vedea că pentru câmpurile electrice generate de sarcini electrice în mişcare sau pentru câmpurile electrice variabile în timp, $\mathrm{rot}\,\vec{E} \neq 0$, ceea ce înseamnă că aceste câmpuri electrice nu sunt conservative. Prin urmare doar câmpul electric al sarcinilor electrice statice (câmpul electrostatic) este un câmp conservativ

$$\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0\,,$$

adică un câmp irotațional ($\mathrm{rot}\,\vec{E} = 0$).

4.6 Substanța în câmp electric

Experiența arată că orice corp îşi păstrează încărcarea electrică (obținută prin frecare, iradiere etc.) doar un timp limitat. Trecerea de la starea de electrizare la starea neutră se numeşte relaxare electrică. Dacă relaxarea electrică a unei substanțe are loc într-un timp lung, atunci acea substanță se numeşte substanță

adnotații……

rău conducătoare de electricitate, izolatoare sau dielectric. Altfel spus, corpurile în care particulele electrizate nu au posibilitatea de se deplasa liber în interiorul acestora rămânând acolo unde au apărut şi nu se răspândesc decât după un timp relativ lung, se numesc dielectrici. Corpuri (substanțe) izolatoare sunt: sticla, mica, răşinile, materialele plastice, ebonita, gazele în anumite condiții etc.

Substanțele prin care sarcina electrică se poate deplasa rapid se numesc substanțe bune conducătoare de electricitate sau conductori. Exemple de conductori: metalele, electroliții şi gazele ionizate.

Între substanțele conductoare şi cele izolatoare se situează substanțele semiconductoare. Acestea nu conduc electricitatea la fel de bine ca metalele sau alți conductori, dar sub acțiunea unor factori externi ca lumina, căldura,

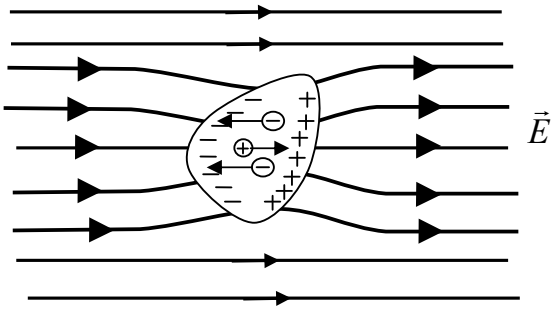


Figura 4.12

presiunea etc., pot deveni relativ bune conducătoare de electricitate.

Conductori în câmp electric

Aşa cum s-a arătat, proprietatea de conductor este conferită unui material de mobilitatea sarcinilor electrice (de regulă, a electronilor) din interiorul lui. Dacă un conductor (metal) este introdus într-un câmp electric (figura 4.12), sub influența forțelor câmpului electric electronii sunt deplasați în sens opus câmpului electric, locul "părăsit" de aceştia încărcându-se pozitiv.

De asemenea, există şi o deplasare în sensul câmpului a ionilor pozitivi. Sarcinile electrice astfel deplasate se aglomerează pe suprafața conductorului (aşa cum se vede din figura 4.12) şi generează un câmp electric propriu de sens opus câmpului exterior în care a fost introdus conductorul. Separarea şi îngrămădirea sarcinilor electrice de semn opus pe suprafața conductorului are

adnotații ……..

loc până când câmpul electric propriu conductorului anulează câmpul electric exterior. Abia după ce în interiorul conductorului câmpul electric rezultant este nul încetează mişcarea sarcinilor din conductor şi astfel se realizează echilibrul electrostatic.

Deci, în condiții de echilibru electrostatic, câmpul electric în interiorul conductorilor este egal cu zero iar potențialul electric este constant.

$$\vec{E} = 0\,,\ V = ct \qquad (4.47)$$

Despre comportamentul conductorilor în câmp electric se mai pot demonstra următoarele:

a) câmpul electric la suprafața conductorilor în echilibru electrostatic este orientat totdeauna normal la suprafața conductorilor, iar suprafețele conductorilor sunt suprafețe echipotențiale;

b) sarcina electrică netă este repartizată în întregime pe suprafața conductorilor şi nu în interiorul lor;

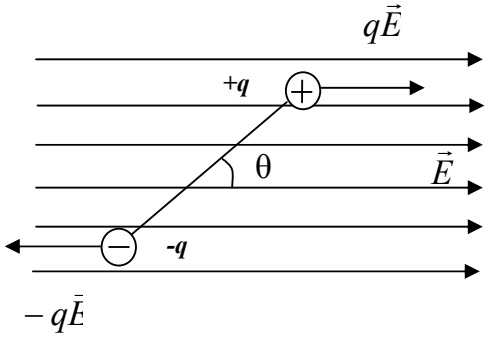


Figura 4.13

c) pe vârfurile foarte ascuțite ale corpurilor conductoare, densitatea superficială de sarcină este foarte mare.

Dielectrici în câmp electric

Caracteristica de bază a dielectricilor constă în faptul că sub acțiunea unui câmp electric se polarizează, adică fiecare element de volum al substanței devine un dipol electric.

Un dipol electric este un sistem de două sarcini electrice egale şi de semne contrare ($+q$ şi $-q$, figura 4.14) aşezate la o distanță l una de alta. Dipolul electric este caracterizat de momentul dipolar $\vec{p}$ definit prin produsul

adnotații……

$$\vec{p} = q\vec{l} \qquad (4.48)$$

unde vectorul $\vec{l}$ are orientarea din figura 4.12.

Dacă un dipol electric este introdus într-un câmp electric uniform $\vec{E}$, atunci fiecare dintre sarcinile dipolului este supusă acțiunii unei forțe egale cu produsul dintre sarcină şi câmp (figura 4.13), adică:

$$\vec{F} = q\vec{E}\ ,\ -\vec{F} = -q\vec{E}$$

Aceste două forțe alcătuiesc un cuplu al cărui moment tinde să rotească dipolul orientându-l în direcția câmpului. Momentul acestui cuplu este:

$$\vec{M} = \vec{l} \times \vec{F} = \vec{l} \times (q\vec{E}) = q\vec{l} \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E} \qquad (4.49)$$

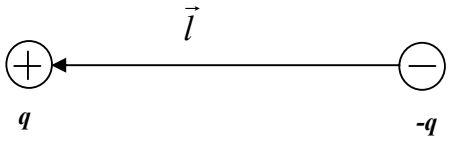


Figura 4.14

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}\ ,\ M = qEl\sin\theta$$

Dacă câmpul electric nu este uniform, cele două forțe care acționează asupra dipolului nu sunt, în general, nici egale ca intensitate şi nici paralele şi de aceea se reduc la o rezultantă şi la un cuplu. Aceasta face ca într-un câmp electric

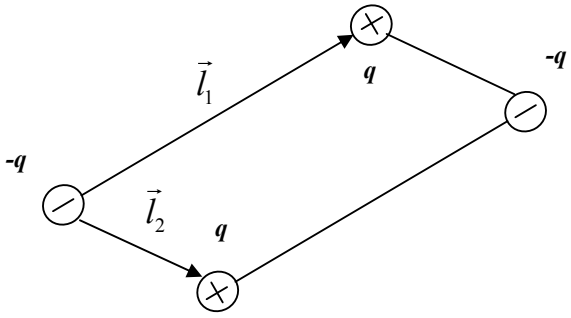


Figura 4.15

✍ adnotații …..

neuniform dipolul electric să aibă o mişcare de rotație, care tinde să-l orienteze în direcția câmpului şi o mişcare de translație.

Menţiune: Un ansamblu de patru sarcini electrice, ca cel reprezentat în figura 4.15, poartă numele de cuadripol. Cuadripolul electric poate fi imaginat printr-o deplasare a unui dipol electric, paralel cu sine pe o distanță oarecare, într-o direcție oarecare şi schimbându-se semnul sarcinilor.

4.6.2 Polarizația electronică

O moleculă conține atât particule cu sarcină electrică pozitivă (protonii) cât şi particule cu sarcină electrică negativă (electronii) care, în condiții normale, sunt egale şi deci molecula este neutră din punct de vedere electric. La unii atomi şi molecule (atomii neutri, moleculele biatomice ale unui singur element: H_2, O_2, Cl_2 etc.) centrul de simetrie al sarcinilor pozitive coincide cu centrul de simetrie al sarcinilor negative. Acest tip de molecule au momentul de dipol nul şi poartă denumirea de molecule nepolare. La altele (de exemplu la moleculele biatomice formate din atomi diferiți – KCl, CsF etc.), centrul sarcinilor pozitive nu coincide cu centrul sarcinilor negative; acestea sunt moleculele polare.

Există două clase de molecule: acelea care nu constituie dipoli permanenți, numite molecule nepolare şi acelea care constituie asemenea dipoli, numite molecule polare.

Moleculele care nu au un moment permanent de dipol li se poate imprima un moment de dipol temporar sau indus făcând să acționeze asupra lor un câmp electric exterior. Sub acțiunea acestuia electronii suferă o mică deplasare față de nuclee, sarcinile electrice pozitive şi negative din moleculă se separă şi centrele lor de simetrie nu mai coincid; molecula devine un dipol electric indus, adică se polarizează.

Dacă o moleculă polară este introdusă într-un câmp electric, momentul dipolar al acesteia se orientează de-a lungul liniilor câmpului electric. Agitația termică moleculară se opune acestei orientări şi de aceea la temperaturi mai ridicate trebuie câmpuri electrice puternice care să poată orienta dipolii moleculari.

adnotații……

Dacă dielectricul format din molecule polare este introdus într-un câmp electric variabil, orientarea dipolilor moleculari se efectuează cu cheltuială de energie şi de aceea dielectricul se încălzeşte.

Fie un condensator plan ale cărui armături sunt încărcate cu electricitate de densitate superficială $+\sigma$ şi $-\sigma$ (figura 4.16). Sarcinile electrice de pe armăturile condensatorului, care sunt dintr-un material conductor, sunt sarcini libere.

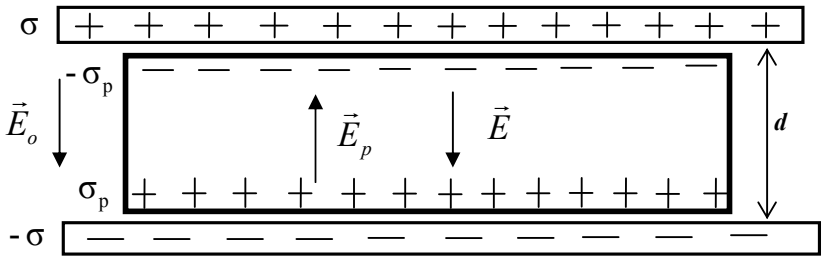


Figura 4.16

Dacă între armăturile condensatorului se introduce un dielectric atunci pe baza fenomenelor de polarizare şi orientare a dipolilor electrici moleculari descrise mai sus, pe suprafața dielectricului adiacentă la armătura pozitivă sunt induse sarcini negative a căror densitate superficială este $-\sigma_p$, iar pe suprafața adiacentă la armătura negativă apar sarcini pozitive de densitate superficială $+\sigma_p$. Spre deosebire de sarcinile electrice libere de pe armăturile condensatorului, sarcinile electrice de pe suprafețele dielectricului sunt sarcini de polarizare sau sarcini legate.

Fie q sarcina electrică moleculară a unui dipol electric molecular şi fie l distanța dintre centrele sarcinilor electrice moleculare; momentul de dipol molecular este $p = ql$. Dacă în unitatea de volum sunt n molecule, atunci momentul electric al unității de volum va fi egal cu suma momentelor electrice ale moleculelor

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i \qquad (4.50)$$

unde P poartă numele de intensitate de polarizare sau numai polarizare; altfel spus,

adnotații ……..

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta V} = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}V} \ .$$

Momentul electric al paralelipipedului de dielectric polarizat este egal cu sarcina electrică Q de pe una din fețe înmulțită cu grosimea dielectricului d :

$$M_p = Qd \tag{4.51}$$

Deci, polarizarea care reprezintă momentul unității de volum, este:

$$P = \frac{M_p}{V} = \frac{Qd}{V} = \frac{\sigma_p Sd}{Sd} = \sigma_p \tag{4.52}$$

Sarcinile legate produc în interiorul dielectricului un câmp electric $E_p = \sigma_p / \varepsilon_o$ (vezi aplicații) de sens contrar câmpului $\vec{E}_o$ produs de sarcinile electrice libere de pe armăturile condensatorului în absența dielectricului.

Câmpul electric total $\vec{E}$ care apare între plăcile condensatorului, este

$$E = E_o - E_p = \frac{\sigma - \sigma_p}{\varepsilon_o}, \tag{4.53}$$

sau

$$\sigma = \sigma_p + \varepsilon_o E \ . \tag{4.54}$$

Ținând seama de relația (4.52), se obține

$$\sigma = P + \varepsilon_o E \ . \tag{4.55}$$

Mărimea

$$\vec{D} = \vec{P} + \varepsilon_o \vec{E} \ , \tag{4.56}$$

poartă numele de inducție electrică şi caracterizează fenomenele de inducție electrică (electrizarea conductorilor prin influență electrică), polarizarea dielectricilor supuşi unui câmp electric etc.

Din (4.55) se obține

$$\sigma = \varepsilon_0 E + \sigma_p = \varepsilon_0 E_0 = \varepsilon E \ , \tag{4.57}$$

sau

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \ . \tag{4.58}$$

Gradele de orientare şi de polarizare ale moleculelor sunt proporționale cu intensitatea $\vec{E}$ a câmpului din interiorul dielectricului şi ca urmare, vectorul polarizare $\vec{P}$ trebuie să fie proporțional cu vectorul câmp $\vec{E}$

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E} \ . \tag{4.59}$$

adnotații……

Coeficientul de proporționalitate χ se numeşte susceptivitate electrică şi caracterizează mediul din punctul de vedere al gradului său de polarizare sub influența câmpului electric.

Din relațiile (4.56), (4.58) şi (4.59), se obține:

$$\vec{D} = \vec{P} + \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0 \chi \vec{E} + \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0 (\chi + 1) \vec{E} = \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} \ , \qquad (4.60)$$

respectiv pentru permitivitatea electrică relativă,

$$\varepsilon_r = 1 + \chi \, . \qquad (4.61)$$

Prin urmare, constanta dielectrică este direct legată de susceptivitate şi, ca şi aceasta, ea este determinată de măsura în care substanța se polarizează în prezența câmpului electric.

Făcând un raționament asemănător celui care a condus la deducerea expresiei (4.24) se găseşte forma generalizată a teoremei lui Gauss:

$$\Phi = \int_S \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = q \ ; \ \mathrm{div}\, \vec{D} = \rho \, . \qquad (4.62)$$

4.6.3 Discontinuitatea vectorilor $\vec{D}$ şi $\vec{E}$ la suprafața de separație a doi dielectrici polarizați

Relația $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ se poate aplica în cazul dielectricilor liniari şi izotropi, fără să fie necesar ca dielectricul să fie şi omogen; astfel constanta dielectrică ε a mediului dielectric poate fi funcție de poziție. Altfel spus în cazul dielectricilor izotropi, polarizarea nu variază cu direcția vectorului $\vec{E}$ iar vectorii $\vec{E}, \vec{D}$ şi $\vec{P}$ sunt paraleli.

Dacă dielectricul este constituit dintr-un singur cristal care face parte din categoria dielectricilor anizotropi (tetragonal, trigonal, romboedric, hexagonal etc.) atunci proprietățile dielectrice ale acestuia depind de direcția câmpului electric față de axele cristalului. În asemenea medii (ex. cristalul de cuarț) vectorii $\vec{E}, \vec{D}$ şi $\vec{P}$ au direcții diferite, relația dintre $\vec{D}$, $\vec{E}$ se scrie sub forma:

$$\begin{aligned} D_1 &= \varepsilon_{11} E_1 + \varepsilon_{12} E_2 + \varepsilon_{13} E_3 \, , \\ D_2 &= \varepsilon_{21} E_1 + \varepsilon_{22} E_2 + \varepsilon_{23} E_3 \, , \\ D_3 &= \varepsilon_{31} E_1 + \varepsilon_{32} E_2 + \varepsilon_{33} E_3 \, . \end{aligned} \qquad (4.63)$$

adnotații ……..

Deci în asemenea cazuri, permitivitatea electrică şi susceptibilitatea electrică este un tensor de ordinul doi.

Un alt aspect important este acela care se referă la discontinuitatea vectorilor

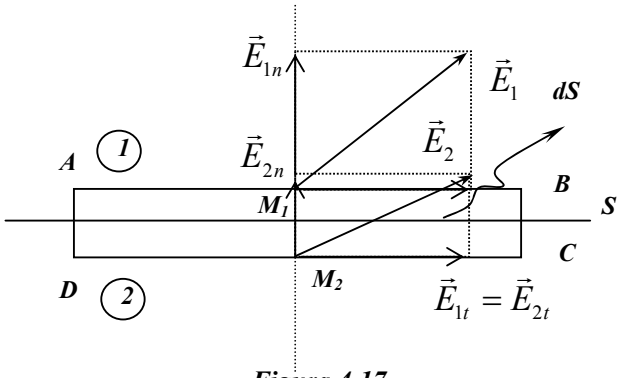


Figura 4.17

$\vec{E}$ şi $\vec{D}$ la suprafața de separație a doi dielectrici polarizați, adică atunci când ε variază discontinuu de la un mediu la celălalt.

Să considerăm două puncte M_1 şi M_2, care se află în fiecare din cei doi dielectrici liniari şi izotropi 1 şi 2 separați de suprafața S şi foarte aproape de un element de suprafață $\mathrm{d}S$ (figura 4.17), precum şi un contur constituit din $ABCDA$.

Expresia circulației câmpului electric de-a lungul acestui contur permite să se scrie:

$$E_{t1} = E_{t2}\,.$$

În aceleaşi puncte, M_1 şi M_2, normalele pozitive sunt îndreptate spre exteriorul suprafeței S care separă cei doi dielectrici (figura 4.18).

Proiecțiile vectorilor $\vec{P}_1$ şi $\vec{P}_2$ pe o aceeaşi normală $\vec{n}$, de exemplu cu sensul de la M_2 spre M_1, vor fi $-P_{1n}$ şi $-P_{2n}$.

Dacă suprafața S poartă sarcini reale de densitate σ_r şi sarcini de polarizare $-\sigma_{f1}$ şi $-\sigma_{f2}$, atunci condiția de trecere (teorema lui Gauss) $\vec{n}\cdot\left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2\right) = E_{1n} - E_{2n} = \sigma/\varepsilon_0$), aplicată în acest caz şi $\sigma = \sigma_r + P_n$, conduc la:

$$E_{1n} - E_{2n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_r - \sigma_{f1} + \sigma_{f2}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_r - P_{1n} + P_{2n}}{\varepsilon_0}\,.$$

adnotații……

Sarcinile $-\sigma_{f1} = -P_{1n}$ sunt cele de la extremitățile negative ale dipolilor din mediul 1 iar $\sigma_{f2} = P_{2n}$ sunt sarcinile de pe extremitățile pozitive ale dipolilor din mediul 2; astfel densitatea superficială de sarcină fictivă este egală cu diferența: $\sigma_{f2} - \sigma_{f1} = P_{2n} - P_{1n}$, deoarece o parte a sarcinilor de polarizare se compensează. Discontinuitatea câmpului $\vec{E}$ se explică prin faptul că acesta este produs atât de sarcinile reale cât şi de sarcinile de polarizare. În absența sarcinilor reale, discontinuitatea componentei normale a lui $\vec{E}$ este la fel cu cea care ar fi produsă de o suprafață conductoare ce poartă sarcini reale egale cu

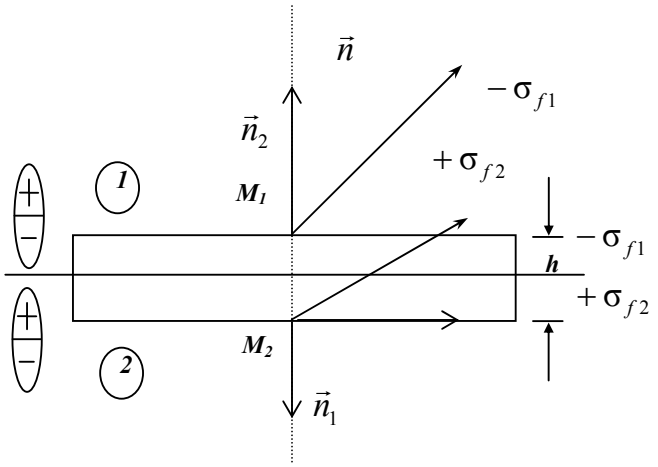


Figura 4.18

diferența $\sigma_{f2} - \sigma_{f1}$. Deci, componenta tangențială a câmpului $\vec{E}$ are aceeaşi valoare de o parte şi de alta a suprafeței S, în timp ce componenta normală suferă o discontinuitate, datorită sarcinilor superficiale reale şi fictive.

Relația de mai sus se poate scrie şi sub forma:

$$(\varepsilon_0 E_{1n} + P_{1n}) - (\varepsilon_0 E_{2n} + P_{2n}) = \sigma_r ,$$

şi ținând seama de $D = \varepsilon_0 E + P$, se obține:

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma_r .$$

Deci vectorul inducție electrică $\vec{D}$ traduce efectul sarcinilor reale, independent de mediu. Dacă $\sigma_n = 0$, componenta normală a lui $\vec{D}$ nu suferă o discontinuitate.

adnotații ……..

Să presupunem că liniile de câmp cad oblic pe suprafața de separare a două medii dielectrice liniari, izotropi şi omogeni cu permitivitățile ε_1 şi ε_2. Admițând că relația $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ este valabilă şi în acest caz, se poate scrie:

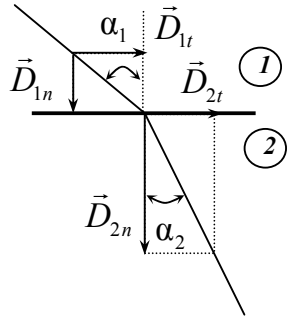


Figura 4.19

$$D_{1t} = \varepsilon_1 E_{1t} \text{ şi } D_{2t} = \varepsilon_2 E_{2t},$$

de unde rezultă că

$$\frac{D_{1t}}{D_{2t}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}, \text{ deoarece } E_{1t} = E_{2t}.$$

Dacă $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ atunci $D_{1t} > D_{2t}$.

Deoarece în absența sarcinilor reale $D_{1n} - D_{2n} = 0$ $(\sigma_r = 0)$, reiese că liniile lui $\vec{D}$ se frâng la trecerea prin suprafața de separare a celor două medii (figura 4.19).

Referindu-ne la o singură linie de câmp, (figura 4.19) conduce la

$$\frac{D_{1t}}{D_{1n}} = \operatorname{tg}\alpha_1 \text{ şi } \frac{D_{2t}}{D_{2n}} = \operatorname{tg}\alpha_2.$$

Din relațiile de mai sus rezultă legea refracției liniilor de câmp ale inducției electrice:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

Raționamente analoage conduc la aceeaşi lege pentru refracția liniilor de câmp ale lui $\vec{E}$; liniile câmpurilor $\vec{E}$ şi $\vec{D}$ se refractă la fel pentru că cei doi vectori sunt paraleli.

adnotații……

În concluzie, dacă la limita de separare a două medii dielectrice nu există sarcini reale, atunci între componentele de-o parte şi de cealaltă a suprafeței de separare, ale vectorilor $\vec{E}$ şi $\vec{D}$ există relațiile:

$$D_{1n} = D_{2n}\,,\ E_{1t} = E_{2t}\,,$$
$$\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}\,,\ \varepsilon_2 D_{1t} = \varepsilon_1 D_{2t}\,.$$

4.6.4 Feroelectricitatea, piezoelectricitatea şi piroelectricitatea

Feroelectricitatea. Electreți

Există unele substanțe care pot avea o polarizație spontană chiar în absența unui câmp electric exterior datorită unor mecanisme de polarizare ale celulei elementare (polarizare de deplasare electronică sau ionică). Aceste substanțe au căpătat denumirea de substanțe feroelectrice (sau seignettoelectrice).

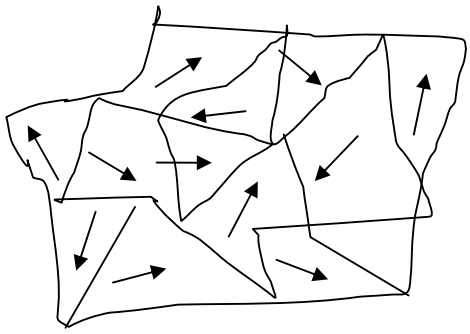


Figura 4.20

Substanțele feroelectrice se deosebesc de ceilalți dielectrici prin următoarele caracteristici:

permitivitatea relativă ε_r, are valori foarte mari (ordinul câtorva mii) în comparație cu a dielectricilor obişnuiți (ordinul unităților);

permitivitatea este funcție de intensitatea câmpului electric exterior şi de temperatură;

valorile lui $\vec{P}$ şi $\vec{D}$ depind atât de $\vec{E}$ cât şi de istoria anterioară a substanței în câmp.

adnotații ……..

Această dependență este cunoscută sub numele de histerezis electric şi este reprezentată în figura 4.21. Inițial, la introducerea substanței feroelectrice în câmp electric, polarizația creşte odată cu creşterea lui E după curba 0-1-2 numită curba de primă polarizare. Pentru valori ale câmpului electric mai mari decât o valoare E_S, polarizația ajunge la saturație P_S. Micşorarea lui E conduce la micşorarea lui P dar nu prin aceleaşi valori, astfel încât atunci când

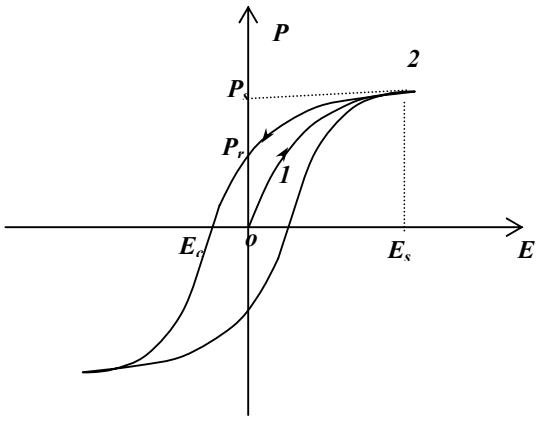


Figura 4.21

E devine zero substanța rămâne polarizată. Polarizația rămasă se numeşte remanentă P_r.

Polarizația poate fi anulată prin aplicarea unui câmp electric de sens contrar numit câmp coercitiv E_C.

Explicația comportării de mai sus se face prin existența unor domenii macroscopice de polarizare spontană (figura 4.20). Direcțiile de orientare a domeniilor fiind diferite, substanța în ansamblu nu este polarizată. Prin acțiunea unui câmp electric exterior are loc o orientare a momentelor domeniilor pe direcția câmpului, orientare care este mai puternică pe măsură ce E creşte; saturație corespunzând tuturor momentelor orientate.

La încetarea acțiunii câmpului electric exterior o parte a orientării se strică dar cea rămasă conferă o polarizare remanentă.

Electreții sunt substanțe dielectrice care-şi mențin polarizarea timp îndelungat. Ei se obțin prin acțiunea unui câmp electric şi a unui agent exterior (termic – termoelectreți, luminos – fotoelectreți, mecanic - mecanoelectreți). Aplicații: generatoare de câmp electric, microfon cu electreți etc.

Piezoelectricitatea

adnotații……

Unele cristale dielectrice, formate din dipoli permanenți, fiind supuse unor

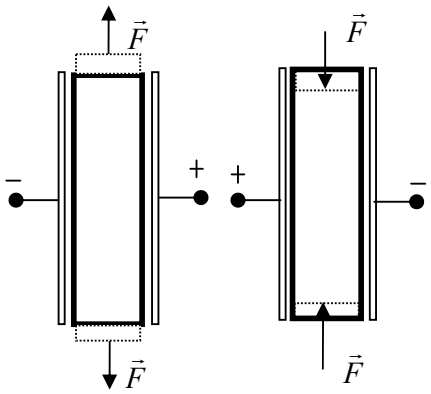


Figura 4.23

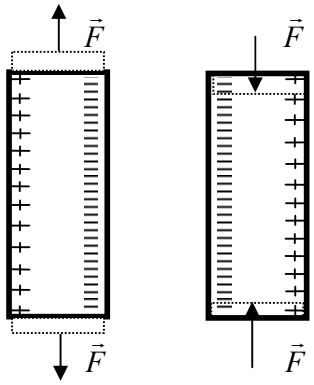


Figura 4.22

eforturi mecanice (comprimare sau destindere) aplicate într-un anumit mod față de axele cristalografice, se polarizează (figura 4.22).

Fenomenul de polarizare sub acțiunea forțelor mecanice se numeşte efect piezoelectric direct. Sub acțiunea unui câmp electric, în aceleaşi cristale apar tensiuni mecanice (figura 4.23); acesta este efectul piezoelectric invers.

Aplicații: producerea ultrasunetelor (efectul piezoelectric invers), doze piezoelectrice etc.

Piroelectricitatea

Piroelectricitatea este fenomenul de polarizare a unui cristal în procesul de încălzire al acestuia.

Aplicații: traductoare piroelectrice.

4.7 Capacitatea electrică. Condensatoare

Dispozitivele (sistemele) care sunt capabile să depoziteze (înmagazineze) sarcină electrică se numesc condensatori, iar capacitatea lor de a depozita sarcina electrică se evaluează cantitativ prin mărimea fizică numită capacitate electrică.

Un condensator electric este un ansamblu (sistem) format din două conductoare (numite plăci sau armături) omogene, încărcate cu sarcini electrice egale şi de

adnotații ……..

semne contrare, separate printr-un dielectric. Prin capacitate electrică a unui condensator se înțelege mărimea fizică dată de relația

$$C = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{q}{U}, \qquad (4.64)$$

în care q este sarcina electrică a unei armături, iar $U = V_1 - V_2$ este diferența de potențial dintre armături.

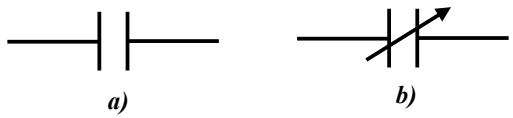


Figura 4.24

Capacitatea unui condensator depinde de poziția relativă a armăturilor, de forma şi de dimensiunile geometrice ale acestora şi de natura dielectricului.

Condensatoarele pot fi clasificate în funcție de natura dielectricului utilizat (gaz, lichid, solid), în funcție de forma armăturilor (plane, cilindrice, sferice) sau din punct de vedere constructiv (fixe, variabile).

Simbolul condensatoarelor este reprezentat în figura 4.24 (a-condensator fix, b-condensator variabil).

Condensatoarele se pot lega în serie, în paralel sau mixt.

4.7.1 Condensatoare legate în serie

La o conexiune (de pe armătura pozitivă) a primului condensator provoacă prin influență apariția unei sarcini egale şi de semn contrar pe cealaltă armătură a aceluiaşi condensator (figura 4.25).

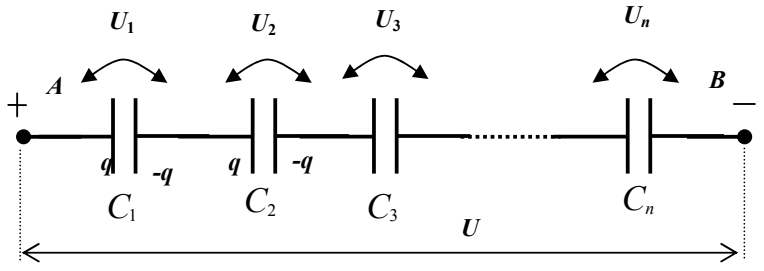


Figura 4.25

Deoarece sarcina electrică se conservă, apare sarcina pozitivă pe armătura pozitivă a celui de-al doilea condensator. Procesul se repetă pentru celelalte

adnotații……

condensatoare. Tensiunea U de la bornele grupării este egală cu suma tensiunilor de la bornele condensatoarelor:

$$U = U_1 + U_2 + ... + U_n = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_3} + ... + \frac{q}{C_n} = q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + ... + \frac{1}{C_n}\right),$$

$$U = q\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{C_i} = q\frac{1}{C}, \qquad (4.65)$$

unde C este capacitatea echivalentă a sistemului de condensatoare legate în serie:

$$\frac{1}{C} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + ... + \frac{1}{C_n}\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{C_i}. \qquad (4.66)$$

4.7.2 Condensatoare legate în paralel

Conectarea (legarea) în paralel a condensatoarelor este reprezentată în figura 4.26. Sarcina electrică q acumulată pe armăturile conectate la borna A a bateriei de condensatoare este

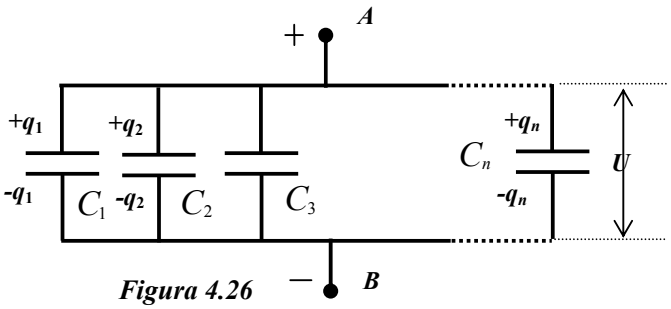


Figura 4.26

$$q = q_1 + q_2 + ...q_n = C_1 \cdot U + C_2 \cdot U + ... + C_n \cdot U =$$
$$= (C_1 + C_2 + ... + C_n) \cdot U = C \cdot U \qquad (4.67)$$

$$\text{unde } C = C_1 + C_2 + ... + C_n = \sum_{i=1}^{n} C_i \qquad (4.68)$$

este capacitatea echivalentă a sistemului de condensatoare legate în paralel.

În cazul legării mixte a condensatoarelor se cunosc, în general, capacitățile condensatoarelor care intră în circuitul de condensatoare precum şi tensiunile surselor de tensiune. Interesează sarcinile de pe armături şi tensiunile la bornele condensatoarelor.

Pentru determinarea sarcinilor se foloseşte legea conservării sarcinii electrice

adnotații ……..

$$\sum_{i=1}^{k} q_k = 0 \qquad (4.69)$$

unde k este numărul de sarcini electrice din nodul electrostatic în care se aplică (4.69).

Pentru determinarea tensiunilor la bornele condensatoarelor se foloseşte teorema potențialului electrostatic pe un contur închis al circuitului:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{C_j} = \sum_{k=1}^{p} U_k \qquad (4.70)$$

unde n este numărul de condensatoare din circuitul parcurs iar p este numărul surselor de tensiune din acel circuit.

Observație:

a) în expresiile (4.69) şi (4.70) sumele sunt algebrice;

b) dacă într-o rețea sunt N noduri, atunci se pot scrie $N-1$ expresii independente de tipul (4.69); altfel spus relația (4.69) se aplică la $N-1$ noduri;

c) expresia (4.70) se aplică într-o rețea doar pentru circuitele (buclele) independente în sensul că fiecare circuit să conțină cel puțin o sursă sau un condensator care să nu fie conținute în alte circuite din rețea.

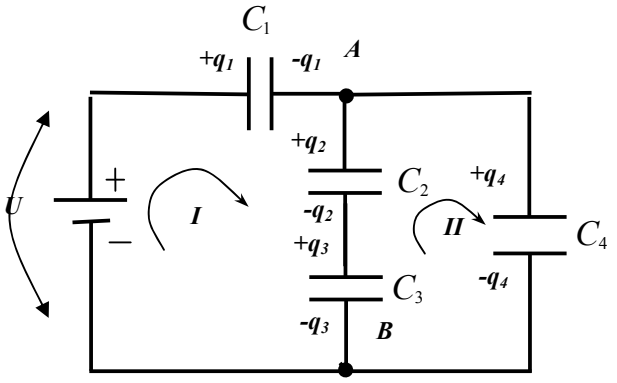


Figura 4.27

Un exemplu de aplicare a expresiilor menționate (numite şi teoremele lui Kirchhoff din electrostatică) pentru circuitul din figura 4.27.este următorul:

$$\text{Nodul } A: \; -q_1 + q_2 + q_4 = 0$$

$$\text{Circuitul I: } \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_3}{C_3} + \frac{q_2}{C_2} = U$$

$$\text{Circuitul II: } -\frac{q_2}{C_2} - \frac{q_3}{C_3} + \frac{q_4}{C_4} = 0 \quad q_3 = q_2$$

adnotații……

4.8 Energia electrostatică

4.8.1 Energia electrostatică a unui sistem de sarcini punctuale

Vom calcula energia electrostatică a unui sistem de sarcini punctuale prin lucrul mecanic efectuat de forţele exterioare împotriva forţelor de interacţiune electrostatică, pentru a realiza sistemul de sarcini electrice prin aducerea sarcinilor electrice de la infinit în punctele în care se află în sistem. Deoarece câmpul electrostatic este conservativ, lucrul mecanic necesar pentru a forma sistemul nu depinde de drumul pe care aducem sarcinile electrice de la infinit

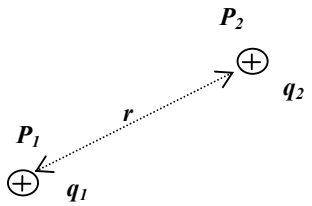


Figura 4.28

până în punctele date ale sistemului şi de asemenea nu depinde de ordinea în care aducem sarcinile.

Pentru simplitatea calculului şi a raționamentului vom considera pentru început cazul unui sistem de două sarcini electrice punctiforme situate în punctele P_1 şi P_2 la distanța r una de cealaltă (figura 4.28).

Realizarea acestui sistem se face astfel încât se aduce întâi sarcina q_1 de la infinit până în punctul P_1. Pentru aceasta nu se efectuează lucru mecanic deoarece neexistând câmp electric, asupra ei nu acționează forțe. În etapa a doua, se aduce sarcina q_2 de la infinit până în punctul P_2, împotriva forţelor de respingere electrostatică ce se manifestă între sarcinile q_1 şi q_2. Trebuie menționat că lucrul mecanic este acelaşi dacă se inversează ordinea de aducere a sarcinilor în punctele menționate sau dacă cele două sarcini sunt aduse simultan în punctele P_1 şi P_2.

Energia W înmagazinată de sistem în timpul formării acestuia este egală cu lucrul mecanic amintit mai sus

adnotații ……..

$$W = L_{\infty,P_1,P_2} = \int_{\infty}^{r} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\infty}^{r} \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad (4.71)$$

Altfel scris,

$$W = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r}q_1 + \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r}q_2 = \frac{1}{2}(q_1 V_2 + q_2 V_1) \qquad (4.72)$$

unde V_2 este potențialul electric al sarcinii q_2 în punctul unde se află sarcina q_1, iar V_1 potențialul sarcinii q_1 în punctul în care se află sarcina q_2.

Generalizând (4.72) pentru n sarcini punctiforme se obține

$$W = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} q_i \cdot V_j$$

unde V_j este potențialul creat în punctul P_i, unde se află q_i ,de sarcina q_j.

4.8.2 Energia electrostatică a distribuțiilor continue de sarcină

Dacă sarcina electrică are o distribuție continuă volumetrică(cu densitatea ρ), superficială (cu densitatea σ) sau liniară (cu densitatea λ) atunci energia electrostatică înmagazinată de sistem are, respectiv, expresii

$$W = \frac{1}{2}\int_V \rho(r)V(r)\,\mathrm{d}V\,,$$

$$W = \frac{1}{2}\int_S \sigma(r)V(r)\,\mathrm{d}S\,, \qquad (4.73)$$

$$W = \frac{1}{2}\int_\Gamma \lambda(r)V(r)\,\mathrm{d}l\,.$$

4.8.3 Energia electrostatică în funcție de câmpul electric

Aşa cum am arătat până acum, energia electrostatică a unui sistem de sarcini se poate interpreta ca fiind asociată cu sarcinile electrice şi pozițiile în spațiu ale acestora. Acesta este punctul de vedere ce rezultă din conceptul de interacțiune electrostatică la distanță, exprimat de legea lui Coulomb. Interesează însă şi acele aspecte în care intervine câmpul electric, fără a ne preocupa cine îl creează. Altfel spus, dacă o sarcină q este introdusă într-un câmp electric $\vec{E}$, asupra ei acționează o forță ($\vec{F} = q\vec{E}$) care prin deplasarea punctului ei de

adnotații……

aplicație produce un lucru mecanic care se face pe seama energiei câmpului. Urmărim să găsim expresia acestei energii în funcție de valoarea lui E. Pentru aceasta facem următorul raționament.

Considerăm un condensator plan neîncărcat. Încărcarea acestuia necesită efectuarea unui lucru mecanic care este măsura energiei înmagazinate în câmpul electric dintre armături. Considerăm că la un moment dat, în procesul de încărcare al condensatorului, tensiunea între armături este U iar sarcina de pe o armătură este q. Lucrul mecanic $\mathrm{d}L$ care trebuie efectuat pentru a transporta sarcina $\mathrm{d}q$ de pe o armătură pe alta este

$$\mathrm{d}L = U\,\mathrm{d}q = UC\,\mathrm{d}U \tag{4.74}$$

unde $\mathrm{d}U$ este modificarea (ridicarea) tensiunii ce survine în urma transportului de sarcină $\mathrm{d}q$. Integrând, se găseşte:

$$W = L = \int_0^U CU\,\mathrm{d}U = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}qU \tag{4.75}$$

Cunoscând, pentru condensatorul plan, expresiile:

$$U = E \cdot d\,,\; C = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \tag{4.76}$$

unde d este distanța dintre armături iar S este suprafața acestora, expresia (4.75) devine:

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon_0 SdE^2 \tag{4.77}$$

Deoarece $S \cdot d = V$ reprezintă volumul cuprins între armăturile condensatorului plan, introducem noțiunea de densitate volumetrică de energie care are expresia

$$\overline{w} = \frac{W}{V} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{E}\varepsilon_0 = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D} \tag{4.78}$$

Această expresie, dedusă în cazul particular al unui condensator plan, are valabilitate generală.

La o altă concluzie cu valabilitate generală se poate ajunge pornind de la un raționament particular. Două sarcini electrice de acelaşi semn se resping până la infinit în timp ce două sarcini electrice de semne contrare se atrag până se ciocnesc şi se neutralizează o parte din sarcini. Şi într-un caz şi în celălalt instabilitatea sistemului format din două sarcini electrice este evidentă. Generalizând acest rezultat Ernshaw a demonstrat următoarea teoremă: o

✍ adnotații ……..

distribuție statică stabilă de sarcină electrică este imposibilă. Prin urmare nici sarcinile electrice din componența atomilor şi moleculelor nu pot forma sisteme statice stabile.

adnotații……

5. ELECTROCINETICA

5.1 Curentul electric

Prin curent electric se înțelege fenomenul de deplasare ordonată a sarcinilor electrice. Purtătorii de sarcină electrică sau purtătorii de curent sunt electronii, ionii pozitivi sau negativi, protonii etc. Dacă purtătorii de sarcină ai curentului sunt electronii (în conductoare sau în tuburile catodice) atunci curentul se numeşte electronic iar dacă purtătorii de sarcină sunt ionii (în gaze şi electroliți) atunci curentul se numeşte ionic. Deplasarea sarcinilor electrice are loc sub acțiunea forțelor electrice; pentru aceasta este necesar ca între diferitele puncte între care are loc această deplasare să existe o diferență de potențial. Fie două conductoare, A şi , aflate la potențiale diferite, V_A şi V_B $(V_A > V_B)$, figura 5.1.

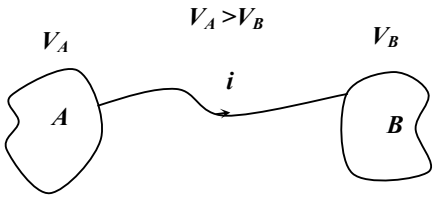


Figura 5.1

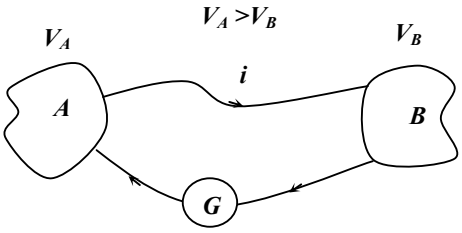


Figura 5.2

Dacă se unesc cele două conductoare cu un fir conductor, atunci ia naştere un curent electric prin firul conductor. Curentul electric durează un timp foarte scurt până când cele două conductoare ajung la acelaşi potențial V $(V_B > V > V_A)$.

De aici se trage concluzia că pentru a avea un curent electric permanent, este necesar să se mențină o diferență de potențial permanentă între cele două conductoare. Dispozitivul G, figura 5.2, construit pe diverse principii, care menține diferența de potențial $V_A - V_B$ un timp îndelungat se numeşte generator electric sau sursă electrică.

✍ adnotații …..

Generatoarele electrice nu creează sarcini electrice, ci fac numai ca particulele purtătoare de sarcini electrice să circule într-un circuit. Generatoarele sunt reprezentate simbolic în figura 5.3.

Dacă starea curentului rămâne neschimbată în timp, atunci spunem că avem de-a face cu un curent staționar.

În toate cazurile, prezența curentului electric este însoțită de unele fenomene cum ar fi de exemplu cele termice, chimice, mecanice, luminoase sau apariția câmpului magnetic.

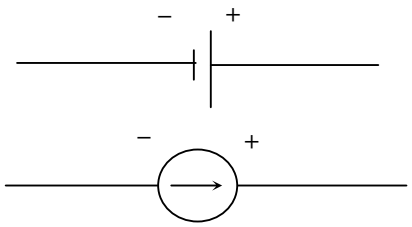


Figura 5.3

Curenții electrici pot fi clasificați după tipul purtătorilor de sarcină (curenți electronici, ionici) sau după modul în care iau naştere. Astfel, curentul electric datorat deplasării ordonate a purtătorilor de sarcină microscopici, într-un mediu macroscopic "fix", (solid, lichid sau gazos) se numeşte curent de conducție (de exemplu curentul de electroni dintr-un fir metalic). Curentul electric datorat deplasării ordonate a purtătorilor de sarcină microscopici dintr-un corp, datorită deplasării în spațiu a acelui corp se numeşte curent de convecție. În fine, în afară de curenții de conducție şi curenții de convecție, există şi curenți de deplasare (în vid şi de polarizare) a căror semnificație va fi dată în paragrafele următoare.

Mărimile fizice care caracterizează curentul electric sunt: intensitatea curentului electric I şi densitatea de curent $\vec{j}$.

În conductorii omogeni şi izotropi, curentul electric este unul de conducție. Prin definiție, intensitatea curentului electric printr-un conductor reprezintă sarcina electrică netă ce traversează în unitatea de timp suprafața unei secțiuni transversale a conductorului:

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}. \qquad (5.1)$$

În S.I. intensitatea curentului electric se măsoară în amperi (simbolul A).

adnotații……

Mărimea fizică care caracterizează complet curentul electric de conducție, în fiecare punct al unui conductor, este densitatea de curent $\vec{j}$.

Pentru a defini densitatea de curent considerăm un conductor (figura 5.4) în care densitatea purtătorilor de sarcină cu sarcina e (+ sau –) este n .

Densitatea de curent (fluxul sarcinii electrice prin suprafața ΔS) este numeric egală cu cantitatea da sarcină ce trece, în unitatea de timp, prin unitatea de suprafață normală pe direcția de deplasare:

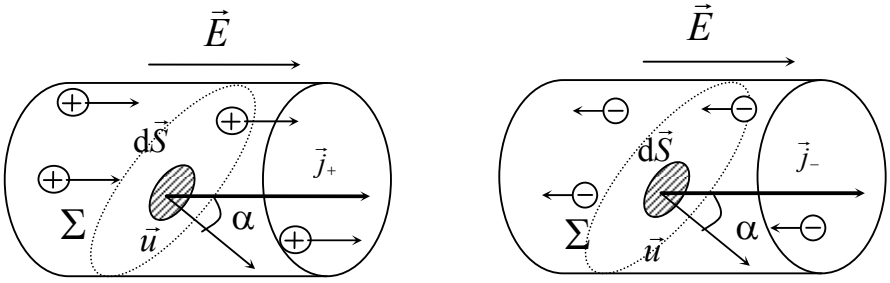
$$j = \frac{\Delta Q}{\Delta S \Delta t} = \frac{neV}{\Delta S \Delta t} = \frac{ne\Delta Sl}{\Delta S \Delta t} = ne\upsilon . \qquad (5.2)$$

Din (5.2) şi figura 5.4 se observă că sensul vectorului $\vec{j}$ este cel al câmpului electric indiferent dacă purtătorii de sarcină electrică sunt pozitivi sau negativi (de exemplu pentru electroni sarcina e este negativă dar şi $\vec{\upsilon}$ este opusă lui $\vec{E}$). Pentru purtătorii de sarcină de sens opus densitatea de curent totală este

$$\vec{j} = \vec{j}_+ + \vec{j}_- = n_+ e_+ \vec{\upsilon}_+ + n_- e_- \vec{\upsilon}_- .$$

Pentru o suprafață S (figura 5.4) care nu este normală pe direcția de deplasare a sarcinilor electrice, intensitatea curentului este:

$$I = \int_S \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_S \vec{j} \cdot \vec{u} \mathrm{d}S = \int_S j \mathrm{d}S \cos\alpha . \qquad (5.3)$$



a) *b)*

Figura 5.4

Sarcina electrică este indestructibilă; ea nu poate fi creată sau distrusă. Sarcinile electrice pot să se deplaseze dintr-un loc în altul dar niciodată nu apar din nimic. Deci sarcina electrică se conservă. Bazându-se pe această lege a fizicii, atunci când există un curent net spre exteriorul unei suprafețe închise, cantitatea de sarcină din interiorul acesteia descreşte printr-o cantitate dq caracterizat prin intensitatea curentului electric

adnotații ……..

Deci legea conservării sarcinii electrice poate fi scrisă astfel

$$I = -\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \oint_S \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_V \mathrm{div}\, \vec{j}\, \mathrm{d}V \,, \qquad (5.4)$$

unde $\mathrm{d}q$ este o variație infinitezimală a sarcinii electrice din interiorul suprafeței S care închide volumul V.

Dacă sarcina din interior are densitatea volumetrică ρ atunci

$$q = \int_V \rho \mathrm{d}V$$

şi expresia (5.4) devine:

$$I = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho \mathrm{d}V = \int_V \mathrm{div}\, \vec{j}\, \mathrm{d}V$$

sau, păstrând numai forma diferențială,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\, \vec{j} = 0 \,. \qquad (5.5)$$

Relația (5.5) exprimă legea conservării sarcinii electrice şi poartă denumirea de ecuația de continuitate.

În cazul regimului staționar, adică al curenților continui cu intensitatea constantă,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

şi ecuația (5.5) devine

$$\mathrm{div}\, \vec{j} \equiv \nabla \vec{j} = 0 \,. \qquad (5.6)$$

Ecuația (5.6) ne arată că într-un conductor nu există puncte din care "izvorăşte" densitatea de curent $\vec{j}$. Sarcina electrică ce intră într-un volum oarecare din conductor în unitatea de timp este egală cu sarcina electrică ce iese din acel volum în unitatea de timp.

5.2 Curentul electric în conductoare

5.2.1 Legea lui Ohm

În acest paragraf vor fi stabilite unele relații care există între mărimile I (sau $\vec{j}$) şi U (sau $\vec{E}$) pentru un material conductor.

adnotații……

În acest scop se consideră, vezi figura 5.5, un conductor metalic de lungime l şi secțiune constantă S la capetele căruia se aplică o tensiune U ; în acest fel în conductor există un câmp electric $\vec{E}$. În lipsa acestui câmp, electronii liberi din metal se vor comporta ca şi atomii sau moleculele unui gaz, adică vor efectua o mişcare termică haotică, de viteză medie $\overline{u}$, drumul liber mediu $\overline{\lambda}$ dintre două ciocniri succesive fiind $\overline{\lambda} = \overline{u} \cdot \tau$.

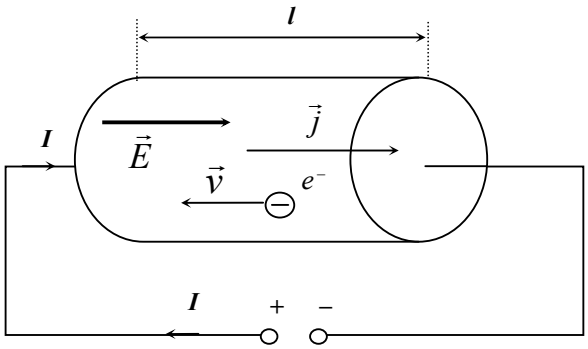


Figura 5.5

Sub acțiunea câmpului electric $\vec{E}$, electronii liberi, datorită forțelor electrice ($e\vec{E}$), vor tinde să se mişte dirijat pe direcția câmpului dar în sens contrar vectorului intensitate a câmpului electric, cu accelerația

$$a = \frac{eE}{m}. \tag{5.7}$$

Viteza medie a mişcării dirijate a electronilor în timpul τ va fi

$$v = \frac{v_0 + v_1}{2} = \frac{v_1}{2} = \frac{a\tau}{2} = \frac{eE}{2m} \cdot \frac{\overline{\lambda}}{\vec{u}} \tag{5.8}$$

iar densitatea de curent, vezi şi (5.2), este

$$j = nev = \frac{ne^2\overline{\lambda}}{2m\overline{u}} E\,. \tag{5.9}$$

Notând:

$$\sigma = \frac{ne^2\overline{\lambda}}{2m\overline{u}} \tag{5.10}$$

expresia (5.9) se scrie:

$$\vec{j} = \sigma\vec{E}\,. \tag{5.11}$$

Constanta σ este cunoscută sub numele de conductivitate electrică.

✍ adnotații ……

Relația (5.11) exprimă legea lui Ohm (sub formă locală): în fiecare punct al conductorului vectorul densitate de curent $\vec{j}$ este proporțional şi coliniar cu vectorul câmp electrostatic.

Deoarece $U = El$ şi notând cu $\rho = 1/\sigma$,numită rezistivitate, pentru intensitatea curentului electric se obține (legea lui Ohm pentru o porțiune de circuit în funcție de tensiunea aplicată şi rezistența porțiunii de circuit:

$$I = jS = \frac{U}{\rho\frac{l}{S}} = \frac{U}{R}, \qquad (5.12)$$

unde $R = \rho l / S$ poartă numele de rezistență electrică. În $S.I.$, rezistența electrică se măsoară în ohmi (Ω).

Expresia (5.12) reprezintă legea lui Ohm pentru o porțiune de conductor omogen şi arată că intensitatea curentului electric este proporțională cu diferența de potențial (tensiunea U) aplicată la capetele conductorului.

Mărimea fizică cu valoarea inversă a rezistenței,

$$G = \frac{1}{R}, \qquad (5.13)$$

se numeşte conductanță şi, ca şi rezistența electrică R, depinde de natura conductorului şi de parametrii lui geometrici.

Trebuie de precizat că rezistența electrică a conductoarelor este funcție de temperatură datorită dependenței rezistivității de temperatură

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha t + \beta t^2 + ...). \qquad (5.14)$$

În (5.14) α şi β sunt coeficienți de variație a rezistivității (rezistenței) cu temperatura iar ρ_0 este rezistivitatea la 0^0C. Deoarece valorile coeficienților β sunt foarte mici, termenul βt^2 poate fi neglijat pentru temperaturi obişnuite.

La temperaturi din domeniul zecilor de Kelvin, rezistivitatea metalelor variază mai repede cu temperatura, după o lege în T^n, unde n poate fi de câteva unități. Există însă metale a căror rezistivitate devine nulă când se găsesc la o temperatură apropiată de zero Kelvin. Temperatura la care un metal devine supraconductor se numeşte temperatură critică. Această temperatură este de 1,1 K pentru Al, 7,3 K pentru etc.

adnotații……

5.2.2 Tensiunea electromotoare. Legea lui Ohm

Considerăm un conductor cu rezistența R_{AB} situat într-un câmp electrostatic) cu intensitatea $\vec{E}$. Lucrul mecanic efectuat de forțele câmpului () pentru a deplasa o sarcină electrică pozitivă unitate ($q = +1$) între punctele A şi este:

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = V_A - V_B = U_{AB} = R_{AB} I \,. \qquad (5.15)$$

Pentru ca intensitatea I a curentului să fie constantă, este necesar ca V_A şi V_B să nu varieze în timp, sau mai exact diferența de potențial $V_A - V_B = U_{AB}$ să fie constantă. Aşa cum am arătat, acest lucru este posibil dacă se utilizează un generator electric G care să formeze împreună cu conductorul un circuit închis (figura 5.7).

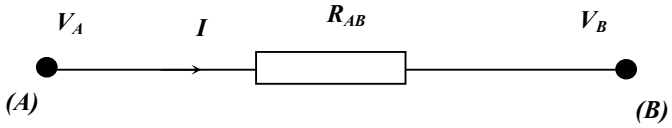


Figura 5.6

Generatoarele electrice folosite în practică produc (creează) un câmp electric indus sau un câmp electric imprimat, care menține circulația curentului prin circuitul format de generator şi conductor. Generatoarele electrice folosite în practică transformă diferite forme de energie în energie electrică: dinamul – energia mecanică în energie electrică; elementele galvanice – energia chimică în energie electrică; fotoelementele - energia luminoasă în energie electrică; pilele termoelectrice şi generatoarele magnetohidrodinamice - energia termică în energie electrică.

În prezența celor două câmpuri, electrostatic ($\vec{E}$) şi electric imprimat ($\vec{E}_i$), pentru o porțiune de circuit A - B cu surse (figura 5.8) se poate scrie

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_A^B \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l} = V_A - V_B + \mathscr{E}_{AB} = R_{AB} I \,. \qquad (5.16)$$

unde

adnotații ……..

$$\int_A^B \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mathscr{E}_{AB}\,, \tag{5.17}$$

poartă numele de tensiune electromotoare pe porțiunea A-B din circuit.

Pentru un circuit închis legea (5.16) (cunoscută şi sub numele de legea lui Ohm pentru o porțiune de circuit neramificată cu surse) devine:

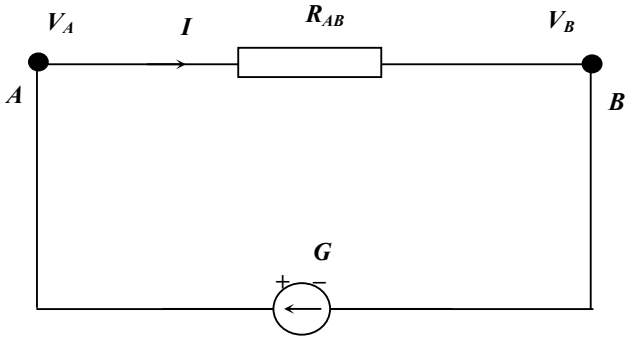


Figura 5.7

$$\mathscr{E} = IR\,, \tag{5.18}$$

unde

$$\oint \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mathscr{E}\,, \tag{5.19}$$

este tensiune electromotoare în circuit şi este o mărime numeric egală cu energia (lucrul mecanic) necesară deplasării unității de sarcină electrică pozitivă în lungul întregului circuit iar R este rezistența întregului circuit.

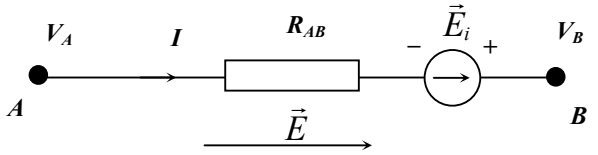


Figura 5.8

Dacă $R = R_{ex} + R_i$ unde R_{ex} este rezistența electrică exterioară generatorului, iar R_i este rezistența interioară a generatorului, atunci (5.18) devine

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R_{ex} + R_i}\,. \tag{5.20}$$

Expresia (5.20) este legea lui Ohm pentru un circuit simplu închis cu surse.

adnotații……

5.2.3 Energia şi puterea în curent continuu

Considerăm un conductor cu rezistența R prin care circulă un curent electric continuu de intensitate I datorat existenței unei diferențe de potențial U la capetele conductorului. Într-un timp t curentul I transportă printr-o suprafață a conductorului o sarcină electrică $q = I\,t$. Energia consumată este egală cu lucrul mecanic efectuat asupra sarcinilor care se deplasează

$$W = L = \int_A^B \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_A^B q\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -q\int_A^B \nabla V\cdot \mathrm{d}\vec{l} = qU = ItU\,. \qquad (5.21)$$

Trebuie de precizat că lucrul mecanic efectuat (energia consumată) de câmpul exterior asupra sarcinilor electrice nu este reținut de către purtătorii de sarcină pentru mărirea energiei lor cinetice, deoarece, în cazul curentului continuu, viteza purtătorilor de sarcină (viteza de drift) se menține constantă $(j = ne\upsilon = ct.)$.

Puterea consumată de la câmpul exterior este

$$P = \frac{W}{t} = UI\,. \qquad (5.22)$$

Aceasta înseamnă că purtătorii de sarcină cedează, prin ciocniri, energia lor rețelei cristaline a conductorului care se încălzeşte (efectul Joule - vezi capitolul cu efecte electro-magnetice). Căldura Q absorbită în intervalul de timp t, de către conductorul cu rezistența R este egală cu energia consumată de câmpul electric exterior pentru deplasarea sarcinilor electrice $q = It$.

$$Q = W = UIt = RI^2t = \frac{U^2}{R}t\,. \qquad (5.23)$$

Aceste relații exprimă legea Joule.

5.2.4 Teorema transferului maxim de putere

Considerăm un generator cu t. e. m. $\mathscr{E}$ şi rezistența interioară R_i care alimentează un grup de consumatoare cu rezistența echivalentă R (figura 5.9). Legea lui Ohm pentru circuit este

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R + R_i}\,. \qquad (5.24)$$

adnotații ……..

Puterea absorbită de consumatoarele circuitului exterior generatorului (puterea debitată de generator pe circuitul exterior) este

$$P = R \cdot I^2 = R\frac{\mathscr{E}^2}{(R+R_i)^2}. \qquad (5.25)$$

Pentru un generator dat ($\mathscr{E}$ şi R_i date) puterea pe circuitul exterior va fi maximă atunci când

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}R} = 0.$$

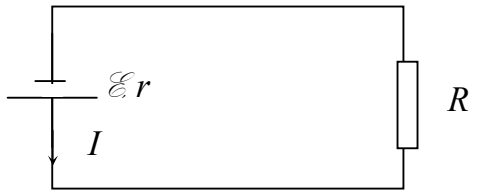


Figura 5.9

Făcând calculele se găseşte

$$R = R_i. \qquad (5.26)$$

Deci puterea debitată pe circuitul exterior este maximă atunci când rezistența echivalentă a circuitului exterior este egală cu rezistența internă a generatorului.

5.2.5 Rețele electrice (în curent continuu)

Un circuit electric simplu conține unul sau mai multe generatoare (surse electrice) şi unul sau mai multe consumatoare legate în serie. Instalațiile electrice şi aparatura electrică şi electronică conțin un număr mare de surse electrice şi consumatoare legate între ele într-un mod complicat; un astfel de ansamblu de surse şi consumatoare poartă numele de rețea electrică.

Într-o rețea electrică, punctul de joncțiune a cel puțin trei conductoare se numeşte nod.

O porțiune de circuit constituită din diverse elemente legate în serie, care este cuprinsă între două noduri, se numeşte ramură. Un ansamblu de ramuri succesive care formează un circuit (contur) închis se numeşte ochi de rețea. În figura 5.10 este reprezentată o porțiune dintr-o rețea electrică în care:

adnotații……

- A, B, C, D, E sunt noduri;
- AB, BC, CD, CE, ED, AE sunt ramuri;
- $ABCEA$, , $ABCDA$ sunt ochiuri.

O rețea electrică se studiază considerând că aceasta este sediul unui regim staționar (permanent) adică intensitățile curenților care circulă prin fiecare ramură are valoare constantă ca şi potențialul fiecărui punct.

Rezolvarea problemelor cu rețele electrice constă în cunoaşterea rezistențelor şi a tensiunilor electromotoare din rețea şi determinarea (calcularea) curenților

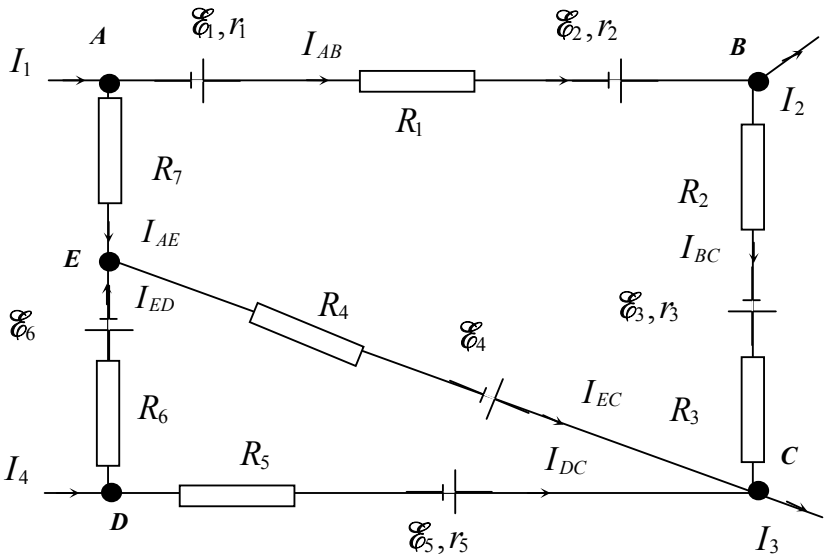


Figura 5.10

prin ramurile acesteia. În acest scop se utilizează două teoreme cunoscute sub numele de teoremele lui Kirchhoff.

Prima teoremă a lui Kirchhoff.

Se aplică nodurilor de rețea şi este o consecință a legii de conservare a sarcinii electrice în regim staționar. Folosind relațiile (5.4) şi (5.6) pentru un nod în care se întâlnesc n curenți şi care se găseşte într-o suprafață închisă S, avem:

$$\oint_S \vec{j}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_V \operatorname{div}\vec{j}\cdot \mathrm{d}V = \sum_{k=1}^{n} I_K = 0\,. \qquad (5.27)$$

Expresia

$$\sum_{k=1}^{n} I_K = 0\,,$$

adnotații ……..

reprezintă prima teoremă a lui Kirchhoff şi arată că pentru un nod oarecare suma algebrică a curenților din acel nod este egală cu zero. Prin convenție în suma algebrică se iau cu plus curenții care intră în nod şi cu minus curenții care ies din nod. De exemplu, pentru nodurile A şi C din figura 5.10, prima teoremă a lui Kirchhoff se scrie astfel:

- Nodul A: $I_1 - I_{AB} - I_{AE} = 0$;
- Nodul C: $I_{BC} + I_{DC} + I_{EC} - I_3 = 0$.

Observație. Dacă într-o rețea electrică există n noduri atunci prima teoremă a lui Kirchhoff poate furniza $n-1$ ecuații independente.

A doua teoremă a lui Kirchhoff.

Se aplică ochiurilor de rețea. Să considerăm un contur dintr-o rețea şi fie i şi $i+1$ două puncte (noduri) succesive din contur astfel încât între acestea să nu existe ramificații. Legea lui Ohm (5.16) pentru porțiunea de circuit aleasă este

$$V_i - V_{i+1} + \mathscr{E}_{i,i+1} = R_{i,i+1} \cdot I_{i,i+1} . \qquad (5.28)$$

Pentru o porțiune din contur (neînchisă), legea lui Ohm se obține însumând expresiile (5.28) pentru acea porțiune:

$$\sum_{i=1}^{n-1} (V_i - V_{i+1}) + \sum_{i=1}^{n-1} \mathscr{E}_{i,i+1} = \sum_{i=1}^{n-1} R_{i,i+1} \cdot I_{i,i+1} \qquad (5.29)$$

sau

$$V_1 - V_n + \sum_{i=1}^{n-1} \mathscr{E}_{i,i+1} = \sum_{i=1}^{n-1} R_{i,i+1} \cdot I_{i,i+1} . \qquad (5.30)$$

Dacă conturul ales este închis atunci punctul 1 coincide cu punctul n, $V_1 = V_n$ şi relația (5.30) devine

$$\sum_{i=1}^{n'} \mathscr{E}_i = \sum_{i=1}^{n'} R_i \cdot I_i . \qquad (5.31)$$

Expresia (5.31) reprezentând a doua teoremă a lui Kirchhoff.

5.3 Curentul electric în gaze

Procesul de trecere a curentului electric prin gaze este cunoscut sub denumirea generală de descărcări electrice în gaze.

Aşa cum s-a arătat, în metale şi electroliți există totdeauna purtători liberi de sarcină electrică iar prezența câmpului electric exterior conduce la o mişcare dirijată a purtătorilor de sarcină electrică. Gazele, dielectricii în general, nu

adnotații……

conțin în condiții normale decât un număr redus de purtători liberi de sarcină electrică. În anumite condiții, în gaze, pot apărea purtători liberi de sarcină electrică (electroni şi ioni), ceea ce dă posibilitatea apariției unui anumit tip de descărcare electrică în gaze. Factorii externi care produc în gaze purtători de sarcină electrică sunt: radiațiile ultraviolete, radiațiile Roentgen, radiațiile nucleare, radiația cosmică, încălzirea puternică a gazului. În gaze pot apare purtători de sarcină electrică şi datorită ionizării prin ciocnire a particulelor gazului (atomi, molecule) de către particule încărcate electric (electroni, ioni) accelerate de către câmpul electric.

Dacă purtătorii de sarcină electrică, liberi, apar sub acțiunea unor factori externi, independenți de prezența unui câmp electric extern, descărcarea electrică (curentul electric în gaz) se numeşte întreținută sau dependentă. În cazul în care purtătorii liberi de sarcină electrică apar în urma unor procese care au loc în gaze datorită câmpului electric exterior, în care se află gazul, descărcarea electrică este neîntreținută sau independentă. Trebuie subliniat că, practic, toate descărcările în gaze sunt inițiate sub acțiunea unor factori exteriori, însă deosebirea dintre cele două tipuri de descărcări menționate constă în faptul că, după inițierea lor sub acțiunea unui factor extern oarecare, la încetarea acțiunii factorului extern descărcările dependente încetează, în timp ce descărcările independente continuă.

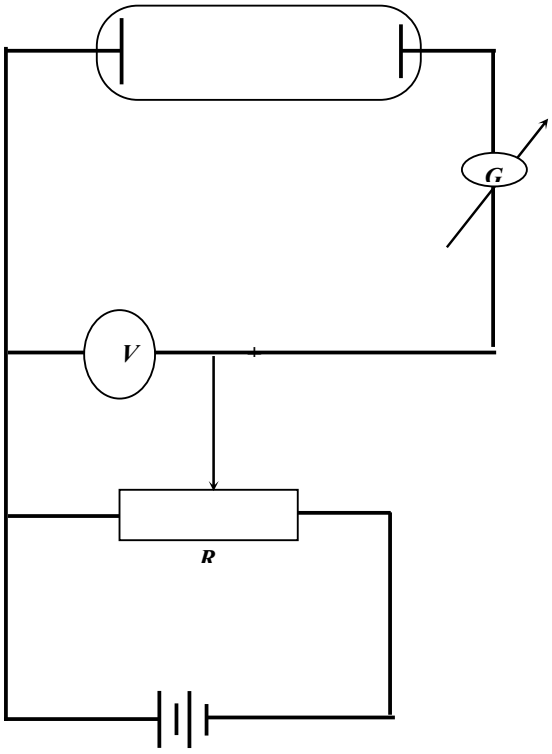


Figura 5.11

✍ adnotații ……

Descărcările electrice independente în gaze sunt de diferite tipuri în funcție de presiunea gazului, de configurația electrozilor şi de parametrii circuitului electric exterior. Fenomenele fizice care au loc în cazul fiecărui tip de descărcare electrică independentă sunt foarte complicare. Exemple de descărcări independente: descărcarea luminescentă, arcul electric, scânteia electrică, efectul (descărcarea) corona.

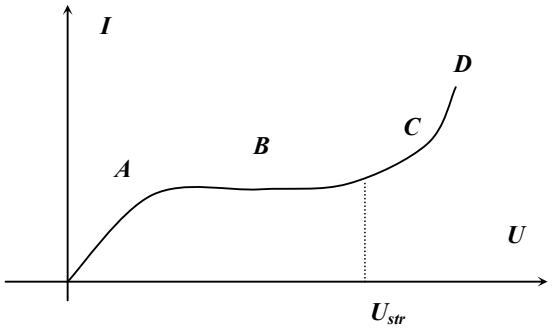


Figura 5.12

Dependența intensității curentului electric printr-un gaz de tensiune aplicată între electrozi poate fi studiată utilizând un montaj electric ca cel din figura 5.12, în care TG - tub (balon) cu gaz, G - galvanometru, V - voltmetru. Caracteristica $I = f(U)$ obținută este prezentată în figura 5.11.

Pentru câmpuri electrice $E = U/d$ puțin intense (sub 10^5 V/m) ionizarea sub acțiunea factorilor externi (electroni, ioni etc.) este singura posibilă (porțiunea A a curbei) şi o parte din ioni se recombină înainte de a ajunge la electrodul colector. Din acest motiv intensitatea curentului creşte o dată cu creşterea diferenței de potențial până când sunt colectați toți ionii formați de particulele ionizante. În regiunea B, când toți purtătorii de sarcină sunt colectați de electrozi, intensitatea curentului rămâne constantă, valoarea acestuia fiind proporțională cu ionizarea inițială. Pentru tensiuni $U > U_{str.}$ (regiunea C) se observă că intensitatea curentului începe din nou să crească; această creştere se datorează fenomenului de multiplicare a purtătorilor de sarcină ca urmare a proceselor de ciocnire cu formare de ioni dintre electronii puternic accelerați şi particulele neutre ale gazului. În regiunea D are loc o ionizare suplimentară în avalanşă şi de aceea apare independența amplitudinii de ionizarea inițială.

Cele două tipuri de purtători de sarcină (electronii şi ionii), datorită valorii diferite a maselor lor efective, vor avea mobilități diferite. Prin mobilitate (μ)

se înțelege viteza orientată (dirijată) în direcția câmpului raportată la unitatea de intensitate a câmpului electric $\mu = v / E$.

Densitatea curentului electric într-un gaz este

$$j = ne \cdot (v_+ + v_-) = ne \cdot (\mu_+ + \mu_-) E , \qquad (5.32)$$

unde μ_+ şi μ_- sunt mobilitățile ionilor pozitivi şi respectiv negativi (de regulă electronii) iar n este concentrația (de echilibru) perechilor de ioni.

5.4 Curentul electric în lichide

5.4.1 Introducere

Pentru apariția unui curent electric într-un lichid la aplicarea unei diferențe de potențial între două puncte ale acestuia, trebuie să existe în acesta purtători de sarcină liberi. Lichidele care conțin asemenea purtători de sarcină se numesc electroliți. În electroliți se află atât purtători de sarcină negativă (anioni – se deplasează spre anod la aplicarea unei diferențe de potențial), cât şi purtători de sarcină pozitivă (cationi – se deplasează spre catod la aplicarea unei diferențe de potențial), purtători obținuți în urma procesului de disociație electrolitică. Procesul de disociație electrolitică reprezintă procesul de separare a substanțelor ionice în ioni pozitivi şi ioni negativi prin dizolvarea acestor substanțe în solvenți sau prin topire. Astfel de exemplu dacă se dizolvă în apă acid sulfuric H_2SO_4 atunci molecula se disociază în ioni negativi SO_4^{2-} şi ioni pozitivi H^+ iar dacă se dizolvă permanganat de potasiu $KMnO_4$ atunci se obțin ionii MnO_4^- respectiv K^+. În general pentru obținerea electroliților se folosesc săruri, acizi sau baze. Datorită conservării sarcinilor electrice numărul de ioni pozitivi este egal cu numărul de ioni negativi.

Să considerăm în continuare un vas cu o soluție electrolitică în care se introduc două plăci metalice. La aplicarea unei diferențe de potențial între cele două plăci în electrolit apare un câmp electric sub acțiunea căruia ionii pozitivi se deplasează către electrodul negativ (catod), iar ionii negativi se deplasează către electrodul pozitiv (anod). În felul acesta se realizează mişcarea dirijată a purtătorilor de sarcină pe direcția câmpului determinând un curent electric.

adnotații……

adnotații ……..

La aplicare acestui câmp electric $\vec{E}$, curentul electric prin electrolit se poate determina prin relația

$$I = n\alpha(\mu_+ + \mu_-)qES\,, \qquad (5.33)$$

unde n reprezintă concentrația substanței dizolvate, α gradul de disociere al substanței, μ_+ şi μ_- mobilitatea ionilor pozitivi respectiv cea a ionilor negativi, q sarcina ionilor, S aria secțiunii considerate pentru evaluarea curentului electric.

Comparând ecuația de mai sus cu expresia legii lui Ohm (forma locală) $\vec{j} = \sigma\vec{E}$ obținem formula conductivității electrolitului

$$\sigma = n\alpha(\mu_+ + \mu_-)q\,. \qquad (5.34)$$

După ce ionii ajung la electrozi urmează neutralizarea lor, după care în funcție de natura acestora se depun sub formă solidă pe electrod, se degajă în atmosferă sub formă de gaz sau se întoarce în electrolit formând compuşi sau redevine ion pentru a relua procesul de transport a sarcinilor electrice prin electrolit.

Acest proces de dirijare a ionilor către electrozi şi transformarea lor în atomi sau radicali prin neutralizare poartă numele de electroliză.

5.4.2 Legile electrolizei

Experimental se poate constata că masa depusă la un catod nu depinde nici de concentrație nici de temperatura electrolitului, depinde numai de intensitatea curentului electric şi intervalul de timp cât trece acest curent prin electrolit. Pentru aceasta construim montajul din figura 5.13 şi considerăm în primele două vase, electroliți de aceeaşi temperatură dar de concentrații diferite, iar în ultimele două de aceeaşi concentrație dar de temperaturi diferite.

Dacă folosim o soluție de sulfat de cupru şi electrozi de cărbune atunci cuprul se depune pe catod şi prin cântărire putem determina cantitatea de cupru ce se depune într-un anumit interval de timp t la trecerea unui curent de intensitate I.

Astfel se poate verifica că masa ce se depune pe un electrod sau se degajă sub formă de gaz, depinde direct proporțional cu intensitatea curentului electric şi

adnotații……

intervalul de timp. Relația prin introducerea unei constante de proporționalitate se poate scrie sub forma

$$m = KIt\,, \tag{5.35}$$

unde K poartă numele de echivalent electrochimic.

Știind că $Q = It$ relația de mai sus poate fi rescrisă sub forma

$$m = KQ\,. \tag{5.36}$$

Relația de mai sus reprezintă o lege cantitativă a electrolizei cunoscută şi sub numele de prima lege a electrolizei sau prima lege a lui Faraday.

A doua lege a electrolizei sau a doua lege a lui Faraday exprimă modul cum depinde echivalentul electrochimic de masa atomică a substanței A, şi de valența substanței n.

$$K = \frac{1}{F}\frac{A}{n}. \tag{5.37}$$

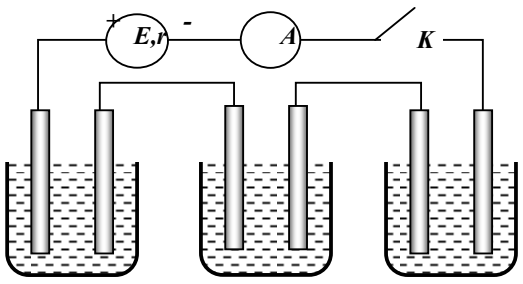


Figura 5.13

Factorul de proporționalitate F poartă numele de numărul lui Faraday fiind o constantă ($F = 96400\,\text{C/echivalent-gram}$)

În tabelul de mai jos sunt reprezentate câteva elemente împreună cu echivalentul lor electrochimic.

Substanța	***A*(u.a.m)**	***n***	***K*(mg/C)**
H	1,008	1	0,0104
Ag	107,880	1	1,118
O	16	2	0,0828
Cu	63,57	2	0,329
Au	197,200	3	0,681

✍ adnotații …..

Electroliza a jucat un rol foarte important în descoperirea sarcinii elementare pe plan teoretic iar pe plan practic prin numeroasele sale aplicații a permis apariția unui nou domeniu electrochimia în cadrul căreia intră electrometalurgia (obținerea unui metal pe cale electrolitică), galvanotehnica (depuneri metalice pe suprafața unor corpuri cu diverse scopuri) şi obținerea diverselor substanțe pe cale electrolitică (soda caustică, clorul, hidrogenul etc.).

5.5 Curentul electric în semiconductori

5.5.1 Noțiuni generale

Semiconductorii sunt materiale a căror conductivitate electrică este cuprinsă între $10^{-8}\ \Omega^{-1}m^{-1}$ şi $10^{3}\ \Omega^{-1}m^{-1}$ deci, din punct de vedere electric, sunt plasați între materialele conductoare şi cele izolatoare.

O caracteristică a semiconductorilor o constituie şi dependența de temperatură a rezistenței electrice. Rezistența electrică a semiconductorilor scade în general cu temperatura în timp ce la metale creşte.

La temperaturi obişnuite, semiconductorii se găsesc în stare solidă, ei fiind, din punct de vedere chimic, elemente ca: germaniul, siliciul, telurul, seleniul sau corpuri ca: oxizi, sulfuri, selenuri etc. ale diferitelor metale.

O proprietate specifică semiconductorilor o reprezintă sensibilitatea acestora față de impuritățile introduse în masa lor în timp ce la conductori prezența acestora nu are practic nici o influență. Introducerea impurităților în cristal poate avea loc în procesul de obținere a materialului, fie ulterior prin difuzie termică sau prin implantare ionică.

În funcție de existența sau nu a impurităților, semiconductorii se împart în: semiconductori fără impurități, denumiți şi *semiconductori intrinseci* şi semiconductori cu impurități, denumiți şi *extrinseci.*

5.5.2 Semiconductori intrinseci

Semiconductorii tipici sunt germaniul şi siliciul care sunt elemente din grupa a IV-a a sistemului periodic. Legătura chimică caracteristică a acestora este legătura covalentă (figura 5.14*a*) care constă în punerea în comun de către

fiecare atom, a câte un electron pentru realizarea configurației electronice stabile. Deci electronii sunt supuşi unor legături stabile neputând participa la transportul de sarcină electrică.

Odată cu creşterea temperaturii, în urma agitației termice a rețelei, unele din legături slăbesc, putându-se rupe, ceea ce are ca rezultat eliberarea unora din electroni (figura 5.14*a*), care se pot deplasa prin cristal, putând participa, sub acțiunea unui câmp electric exterior, la procesul de conducție electrică. Locul părăsit de un astfel de electron poartă numele de "gol". Acest gol poate fi ocupat de un alt electron care lasă un gol în locul de unde a plecat; deci avem de-a face şi cu un proces de deplasare a golurilor. Din punct de vedere energetic, acest proces poate fi explicat astfel (vezi figura 5.14*b*). Pentru ca un electron, legat în atom, să devină electron liber de conducție trebuie ă treacă prin salt cuantic din banda de valență în banda de conducție. Acest fenomen are loc dacă electronului i se dă o energie ΔW , numită energie de activare, a cărei valoare este determinată de lățimea benzii interzise.

În cristalele semiconductoare există, chiar la temperatura camerei, un număr considerabil de electroni capabili să treacă din banda de valență în banda de conducție, în timp ce în dielectrici astfel de electroni, practic, nu există.

Trecerea în banda de conducție nu se poate realiza însă printr-o acumulare continuă şi deci printr-o creştere continuă a energiei. Pentru a trece un electron

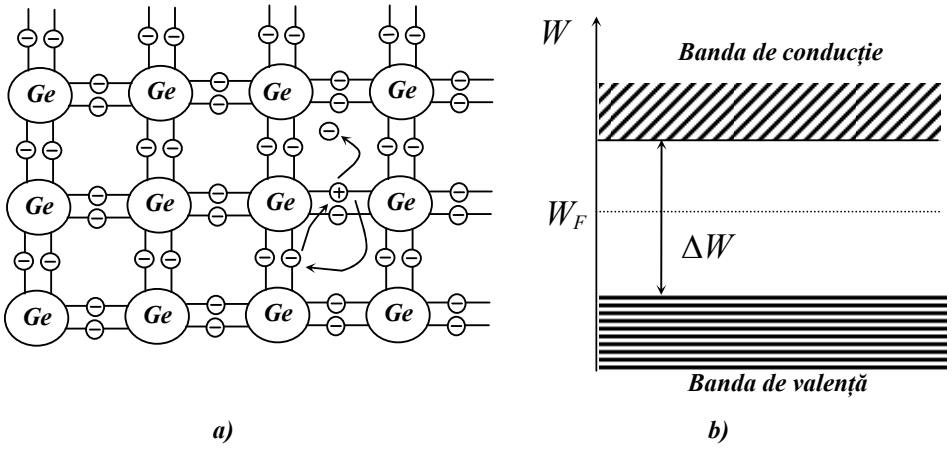


Figura 5.14

adnotații ……..

în zona de conducție va fi necesară o sursă care să poată ceda dintr-o dată o cantitate de energie mai mare sau cel puțin egală cu energia de activare. Drept o astfel de sursă poate fi considerat mediul înconjurător prin căldura cedată de acesta cristalului semiconductor.

Se poate arăta că, în conformitate cu statistica lui Maxwell - Boltzman, concentrația electronilor din banda de conducție este dată de expresia:

$$n = N_c \mathrm{e}^{-\frac{W_C - W_F}{KT}}, \qquad (5.38)$$

unde W_C este energia electronului pe nivelul cel mai coborât al benzii de conducție (energia cea mai mică a electronului în banda de conducție), $N_c = 4{,}821015\ \mathrm{T}^{3/2}\mathrm{cm}^{-3}$ este densitatea efectivă a stărilor energetice în banda de conducție iar W_E este energia nivelului Fermi.

Concentrația golurilor din banda de valență este dată de formula:

$$p = N_V \mathrm{e}^{-\frac{W_F - W_V}{KT}} \qquad (5.39)$$

unde W_V este valoarea cea mai mare a energiei din banda de valență iar N_V este densitatea efectivă a stărilor din banda de valență.

În concluzie, sub influența căldurii, a luminii, cât şi a celorlalte forme de energie, are loc o trecere a electronilor din banda de valență în banda de conducție. Prin această trecere, iau naştere electronii şi golurile de conducție, a căror concentrație se calculează aplicând formulele (5.38) şi (5.39). Procesul de formare a perechii electron-gol poartă numele de *generare de perechi*.

Semiconductorii intrinseci sunt folosiți, destul de rar, la fabricarea dispozitivelor semiconductoare. Funcționarea dispozitivelor semiconductoare moderne se bazează pe utilizarea efectelor care apar datorită introducerii în semiconductor a unor impurități. Astfel de semiconductori cu impurități se numesc extrinseci.

5.5.3 Semiconductori extrinseci

Un atom străin poate pătrunde în rețeaua cristalină a unui material semiconductor plasându-se fie într-un interstițiu al rețelei, fie într-un nod, înlocuind acolo un atom al rețelei de bază sau completând un loc vacant. Pătrunzând, prin substituție, în rețeaua cristalină a unui material semiconductor, atomul de impuritate poate satura sau nu legăturile cu care

adnotații……

atomul înlocuit era legat în rețea. Dacă atomul de impuritate are aceeaşi valență cu a semiconductorului, atunci acest atom saturează legăturile rețelei şi configurația electronică nu se schimbă. Dacă însă prin introducerea unui atom străin legăturile de valență ale atomului substituit din rețeaua materialului de bază, nu sunt saturate, atunci impuritățile de acest tip poartă numele de impurități ionizate (electric active) întrucât ele modifică echilibrul purtătorilor de sarcină din materialul de bază. În acest ultim caz se întâlnesc două situații distincte.

1. Atomii de impuritate au un număr de electroni de valență mai mare ca atomul de bază. De exemplu în cazul celor mai utilizate materiale semiconductoare ca Si şi Ge, introducerea unor atomi ai elementelor din grupa a cincea ca Sb, As, P, conduce la apariția unui electron nelegat în rețeaua cristalină (figura 5.15). În acest caz, patru dintre cei cinci electroni de valență ai atomului de impuritate (de ex. As) formează, împreună cu cei patru electroni de valență ai atomilor vecini din semiconductorul de bază (de ex. Si) ce-l înconjoară, o legătură covalentă. Se observă că nu toți electronii de valență ai atomului de As îşi găsesc plasament în rețeaua riguros ordonată a cristalului de Si. Al cincilea electron al său devine un electron „excedentar”. Energia de legătură dintre aceşti electroni excedentari şi atomii de impuritate este atât de mică, încât, chiar la temperatura camerei, practic toți aceştia se desprind de restul atomic, părăsind atomii de impuritate şi încep să migreze prin cristal. Aceasta face ca, la temperatura camerei şi cu atât mai mult, la temperaturi mai

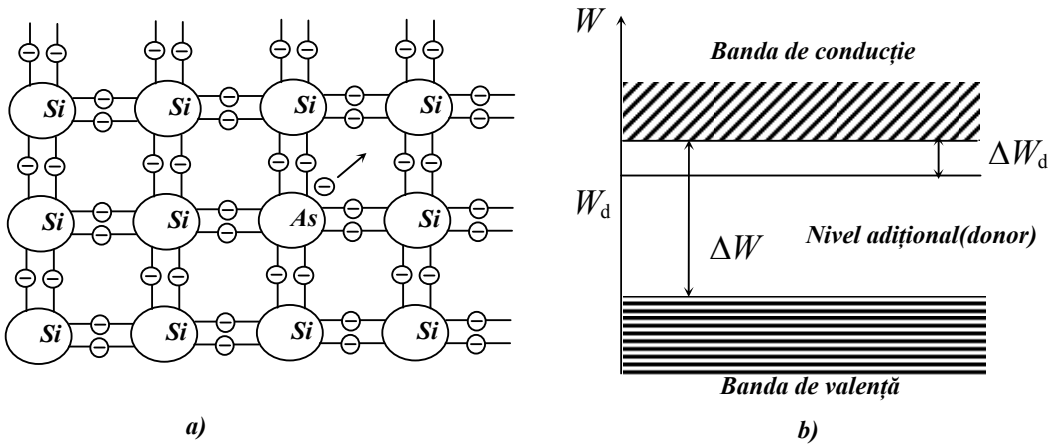


Figura 5.15

adnotații ……..

ridicate, toți atomii impurității să fie în stare ionizată.

Din punct de vedere energetic, totul apare ca şi cum între banda de valență şi banda de conducție, deci în banda interzisă a cristalului de bază (figura 5.15.b) există un nou nivel energetic permis, denumit nivel adițional, ce este plasat mult mai aproape de banda de conducție, întrucât energia de activare a atomului de impuritate este mult mai mică decât cea corespunzătoare cristalului de bază. Datorită acestui fapt, electronii de valență ai atomului de impuritate trec cu uşurință în banda de conducție a cristalului de bază, devenind electroni liberi de conducție.

Atomul de impuritate care cedează electronul poartă denumirea de *atom donor*, respectiv *impuritate donoare*, rămânând sub formă de ion pozitiv legat în rețeaua cristalului. Conducția electrică la acest tip de semiconductori (tip *n*), cu impurități donoare, poate fi considerată numai de natură electronică şi este denumită conducție de tip *n*.

2. Atomii de impuritate au un număr de electroni de valență mai mic decât atomul de bază. În acest caz deoarece valența atomului de impuritate (In , Ga , B , Al) este mai mică decât a atomului semiconductorului de bază, o valență a atomului rețelei de bază, va rămâne necompensată (figura 5.19). Pentru ca electronul să treacă din una din legăturile vecine în locul golului astfel apărut, el are nevoie de o energie foarte mică. Datorită acestui fapt, la temperaturi

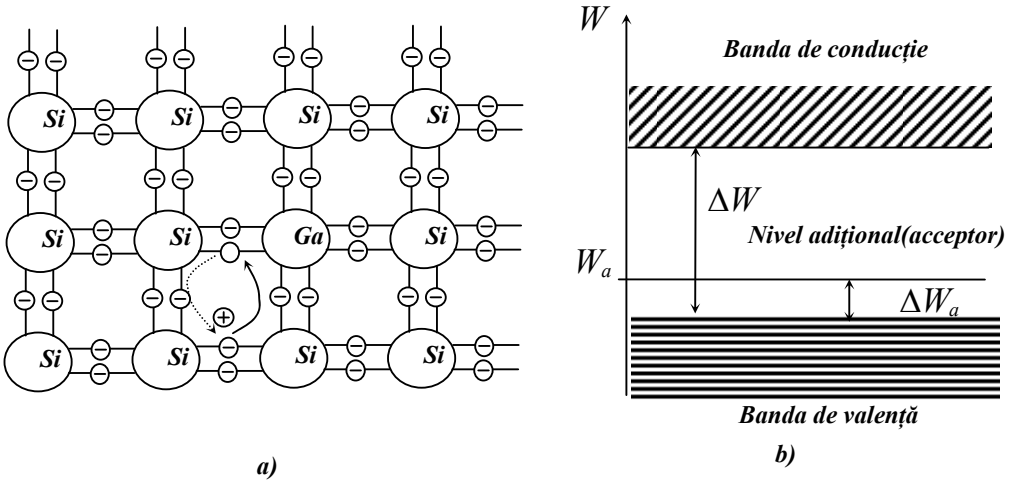


Figura 5.16

adnotații……

medii, şi mai cu seamă la cele ridicate, atomii de impuritate capturează electroni de la legăturile vecine, devenind prin aceasta ioni negativi. Deci golurile migrează haotic prin cristal.

Din punct de vedere energetic şi de această dată apare un nivel permis adițional, între banda de valență şi banda de conducție a semiconductorului de bază, plasat, însă, în imediata vecinătate a benzii de valență. Prin trecerea unui electron din banda de valență pe nivelul adițional acceptor, în banda de valență apare un gol (o lipsă de electron) care, fiind compensat electronic de electroni de pe nivelele inferioare ale benzii de valență, face ca acesta să migreze în cadrul rețelei, constituind un purtător de sarcină pozitivă liber, ce poate întreține un curent sub acțiunea unui câmp electric exterior.

Semiconductorii cu impurități acceptoare, prezentând o conductibilitate electrică prin goluri, poartă denumirea de semiconductori de tip p.

Purtătorii de sarcină a căror concentrație este predominantă poartă numele de purtători majoritari. Purtătorii de sarcină a căror concentrație este mai mică decât cea a purtătorilor majoritari, sunt denumiți purtători minoritari. Astfel, pentru un semiconductor de tip n, de exemplu, purtătorii majoritari sunt electronii, iar cei minoritari – golurile. Într-un semiconductor de tip p situația devine inversă, purtătorii majoritari sunt golurile iar purtătorii minoritari – electronii.

Numărul purtătorilor de sarcină n şi p în semiconductorii cu impurități este

$$n = Ae^{-\frac{\Delta W_d}{KT}}\ ,\ p = Be^{-\frac{\Delta W_a}{KT}}\ , \qquad (5.40)$$

unde ΔW_d şi ΔW_a reprezintă valorile energetice ce separă nivelele adiționale de benzile de conducție şi de valență iar A şi B sunt mărimi care depind de temperatură şi de numărul nivelelor donoare N_d respectiv acceptoare N_a.

5.5.4 Densitatea curentului într-un semiconductor

Electronii şi golurile participă, pe baza energiei lor termice, la mişcarea dezordonată a agitației termice. În domeniile în care există aplicat din exterior un câmp electric, peste mişcarea dezordonată se suprapune o mişcare ordonată a purtătorilor de sarcină, în direcția câmpului electric. Cele două tipuri de purtători de sarcină (electronii şi golurile), datorită valorii diferite a maselor lor efective, vor avea mobilități diferite. Prin mobilitate μ se înțelege viteza

adnotații ……..

orientată (dirijată) în direcția câmpului raportată la unitatea de intensitate a câmpului electric

$$\mu = \frac{v}{E}. \tag{5.41}$$

Fie n şi p concentrația electronilor liberi şi a golurilor. Densitatea de curent de electroni $\vec{j}_n$ (componenta de drift) datorită deplasării orientate în câmpul electric a acestora este

$$\vec{j}'_n = en\vec{v} = en\mu_n \vec{E} = \sigma_n \vec{E}. \tag{5.42}$$

Analog, densitatea de curent de goluri este:

$$\vec{j}'_p = ep\mu_p \vec{E} = \sigma_p \vec{E}. \tag{5.43}$$

Într-un semiconductor densitatea curentului total este dată de suma dintre densitatea de curent de electroni şi densitatea de curent de goluri:

$$\vec{j}' = \vec{j}'_n + \vec{j}'_p = e(n\mu_n + p\mu_p)\vec{E} = \sigma\vec{E}. \tag{5.44}$$

În acord cu această relație, conductivitatea unui semiconductor este:

$$\sigma = en\mu_n + ep\mu_p = \sigma_n + \sigma_p. \tag{5.45}$$

În semiconductorii de tip n, $n >> p$ şi $\sigma \approx \sigma_n$ iar în semiconductorii de tip p, $p >> n$ şi $\sigma \approx \sigma_p$

Într-un semiconductor densitatea curentului electric nu este determinată numai de acțiunea câmpului electric $\vec{E}$ ci şi de existența unui gradient al concentrației purtătorilor de sarcină. Aceasta este tocmai cauza apariției componentei de difuzie a curentului, a cărui densitate este proporțională, atât cu coeficientul de difuzie D, cât şi cu gradientul densității purtătorilor de sarcină

$$\vec{j}''_n = eD_n \operatorname{grad}(n) = eD_n \nabla n, \tag{5.46}$$

$$\vec{j}''_p = -eD_p \operatorname{grad}(p) = -eD_p \nabla p. \tag{5.47}$$

D_n şi D_p sunt coeficienți de difuzie ai electronilor şi respectiv, golurilor şi sunt legați de mobilități prin relația lui Einstein

$$D_n = \frac{KT}{e}\mu_n, \; D_p = \frac{KT}{e}\mu_p \tag{5.48}$$

Semnul minus pentru densitatea de curent, datorat difuziei golurilor, apare din cauză ca in timp ce $\mathscr{E}$ este o funcție crescătoare de x, fluxul golurilor, care tinde să egaleze diferența de densitate, dă naştere unui curent de difuzie dirijat după x descrescător. În cazul difuziei electronilor semnul plus se explică prin

adnotații……

direcția opusă a fluxului de electroni în raport cu cea a curentului de difuzie datorat acestora.

Astfel, pentru densitățile de curent de ansamblu (drift şi difuzie) avem

$$\vec{j}_n = \vec{j}_n' + \vec{j}_n'' = en\mu_n \vec{E} + eD_n \nabla n\,, \tag{5.49}$$

$$\vec{j}_p = \vec{j}_p' + \vec{j}_p'' = ep\mu_p \vec{E} - eD_p \nabla p\,, \tag{5.50}$$

sau

$$\vec{j}_n = en\mu_n \vec{E} + KT\mu_n \nabla n\,, \tag{5.51}$$

$$\vec{j}_p = ep\mu_p \vec{E} - KT\mu_p \nabla p \tag{5.52}$$

care poartă numele de *ecuații de transport* şi sunt utile în teoria dispozitivelor cu corp solid.

După cum s-a mai arătat, în volumul unui semiconductor poate apărea pe lângă fenomenul de transport al purtătorilor de sarcină prin difuzie şi drift şi fenomenul de generare şi recombinare a purtătorilor de sarcină (a perechilor electron – gol). Variația densității purtătorilor mobili este descrisă de *ecuația de continuitate*, care poate fi scrisă pentru electroni şi respectiv, pentru goluri, sub forma:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{n - n_0}{\tau_n} + \frac{1}{e}\operatorname{div}\vec{j}_n \tag{5.53}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{p - p_0}{\tau_p} - \frac{1}{e}\operatorname{div}\vec{j}_p\,, \tag{5.54}$$

unde n_0 şi p_0 sunt concentrațiile la echilibru, iar

$$\tau_n = \frac{L_n^2}{D_n} \text{ respectiv } \tau_p = \frac{L_p^2}{D_p}$$

sunt timpii de viață a electronilor şi respectiv a golurilor, L_n şi L_p sunt lungimile de difuzie a electronilor şi respectiv, a golurilor.

5.6 Alte tipuri de curenți electrici

În paragrafele anterioare s-a discutat despre curenții electrici de conducție electronică din metale, despre curenții ionici din gaze şi electroliți precum şi despre curenții de drift şi difuzie din semiconductori.

✍ adnotații ……..

5.6.1 Curentul optoelectronic

Când printr-un conductor se propagă lumină (undă electromagnetică) în conductor apare un curent electric continuu datorită interacțiunii fotonilor cu electronii, interacțiune care conduce la absorbția fotonilor şi la căpătarea unor impulsuri care duc la apariția unei mişcări ordonate a purtătorilor de sarcină în raport cu rețeaua cristalină, în direcția de propagare a luminii. Mărimea curentului care apare trebuie să depindă atât de structura energetică a solidului cât şi de mecanismul de interacție a luminii cu purtătorii de sarcină.

5.6.2 Curentul acustoelectric

Când o undă acustică se propagă printr-un mediu care conține purtători liberi de sarcină electrică, în acesta apare un curent electric continuu orientat de-a lungul direcției de propagare a undei, numit curent acustoelectric. Fenomenul constă în transmiterea unui impuls de către undă particulei purtătoare de sarcină electrică care are ca rezultat atenuarea undei şi antrenarea purtătorilor de sarcină în direcția de propagare a undei ceea ce înseamnă un curent electric continuu.

5.6.3 Curentul termoelectric

Dacă într-un mediu care conține purtători liberi de sarcină electrică există un gradient de temperatură atunci prin el va trece un curent electric numit curent termoelectric. Curentul termoelectric are o componentă datorită difuziei purtătorilor de sarcină din regiunile de temperatură mai mare spre regiunile de temperatură mai mică şi o componentă fononică datorită fluxului de fononi de la regiunea mai caldă spre regiunea mai rece.

5.6.4 Curenți de emisie termoelectrică

Dacă o substanță (în special metale) este încălzită, la suprafața acestuia se aplică un câmp electric sau este iluminată atunci substanța este părăsită de electroni luând naştere, respectiv, curenți de emisie termoelectrică, curenți de emisie Schottky şi curenți fotoelectronici.

adnotații……

5.6.5 Curenți de deplasare

Curenții de deplasare ($\vec{j}_d$) în dielectrici sau vid apar în cazul unor câmpuri electrice variabile în timp

$$\vec{j}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \qquad (5.55)$$

Observație. Curenții de deplasare (vezi ecuațiile lui Maxwell), curenții tunel, curentul limitat de sarcină spațială, curentul electric prin salt fac obiectul unor capitole specializate de fizică.

5.7 Generatoare electrice

Generatoarele electrice sau sursele de tensiune electromotoare transformă o anumită formă de energie (chimică, termică, luminoasă, mecanică) în energie a curentului electric. Generatoarele electrice nu creează sarcini electrice ci fac ca purtătorii de sarcină electrică să "circule" într-un circuit datorită unor câmpuri electrice imprimate sau a unor câmpuri electrice induse (în general numite electromotoare) care sunt de altă natură decât a câmpului electrostatic.

5.7.1 Surse chimice de tensiune electromotoare.

Sursele chimice (pilele electrice) sunt generatoare care transformă energia chimică în energie electrică. Ele se împart în două categorii:

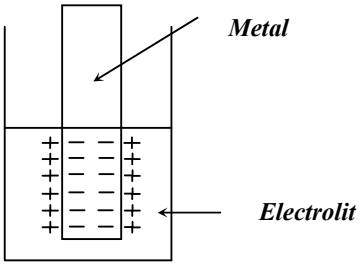


Figura 5.18

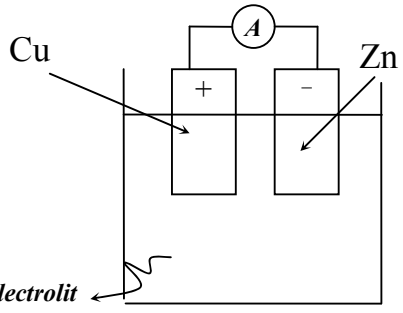


Figura 5.17

✍ adnotații ……..

1. pile ireversibile, caracterizate prin rezistențe interne mari şi curenți mici, care fac doar conversia energie chimică → energie electrică (pila Volta),

2. pile reversibile, caracterizate prin rezistențe interne mici, care fac atât conversia energie chimică → energie electrică, cât şi energie electrică → energie chimică (pila Daniell, pila Leclanché, acumulatoarele).

Dacă într-un vas care conține un electrolit oarecare se introduce o baghetă metalică (figura 5.18) atunci între metal şi electrolit apare o diferență de potențial numită potențial de electrod; aceasta depinde atât de natura metalului cât şi de natura electrolitului.

Dacă într-un electrolit se introduc doi electrozi din metale diferite atunci cele două metale vor avea potențiale diferite şi printr-un fir conductor care le unește în exteriorul vasului cu electrolit va trece un curent electric; sistemul (lanțul) realizat este o sursă chimică sau pilă electrică sau element galvanic.

Dacă lanțul (sistemul) are schema $(+)Cu/H_2SO_4/Zn(-)$ atunci avem de a face cu pila Volta (figura 5.17) care are t.e.m. de aproximativ $0{,}9\ V$.

Dacă lanțul are schema $(+)C/MnO_2/NH_4Cl/Zn(-)$ atunci avem de a face cu pila Leclanché (figura 5.19) care are t.e.m. de aproximativ $1{,}5\ V$.

Pila Volta nu poate fi readusă în starea inițială dacă i se dă din exterior energie electrică deoarece reacțiile chimice din pilă nu sunt reversibile. Reacțiile chimice globale sunt:

a) pila debitează curent

$$H_2SO_4 + Zn \rightarrow ZnSo_4 + H_2, \tag{5.56}$$

$$\begin{cases} 2H^+ + 2e^- \rightarrow H_2 & \text{la electrodul din Cu} \\ SO_4^{2-} + Zn \rightarrow 2e^- + ZnSO_4 & \text{la electrodul din Zn} \end{cases}; \tag{5.57}$$

b) pila primeşte curent

$$H_2SO_4 + Cu \rightarrow CuSO_4 + H_2. \tag{5.58}$$

La electrodul de Cu al pilei Volta are loc reacția chimică

$$2H^+ + 2e^- \rightarrow H_2, \tag{5.59}$$

care conduce la polarizarea acestuia şi din această cauză t.e.m. a pilei scade.

Pentru readucerea sau suprimarea fenomenului de polarizare a pilei se utilizează un depolarizant-vezi pila Leclaché (figura 5.19).

Alte tipuri de pile:

pila Daniell are lanțul $(+)Cu/CuSO_4/ZnSO_4/Zn(-)$ şi t.e.m. de 1,09V

adnotații……

pila Weston (pilă etalon de tensiune) are lanțul (+)Pt/Hg/Hg_2SO_4/$CdSO_4$/ amalgam de Cd/Pt(-) şi are t.e.m. de 1.01864V (la 20^0C)

Acumulatoarele sunt surse de t.e.m. caracterizate prin reacţii chimice reversibile. Acumulatoarele transformă energia chimică în energie electrică (descărcarea acumulatoarelor) şi energia electrică în energie chimică (încărcarea acumulatoarelor). După natura electrolitului acumulatoarele pot fi acide sau alcaline. Un acumulator acid (cu plumb) încărcat are lanțul $(+)PbO_2/H_2SO_4/Pb(-)$ şi o t.e.m. de circa $2\ V$.

Schema reacției chimice globale dintr-un astfel de acumulator este următoarea

$$Pb + PbO_2 + 2H_2SO_4 \underset{\text{încărcare}}{\overset{\text{descărcare}}{\rightleftharpoons}} 2PbSO_4 + 2H_2O\,. \qquad (5.60)$$

Un acumulator alcalin are lanțul $(+)Ni_2O_3$/solutie KOH/$Fe(-)$ şi o t.e.m. de circa 1,3 V .

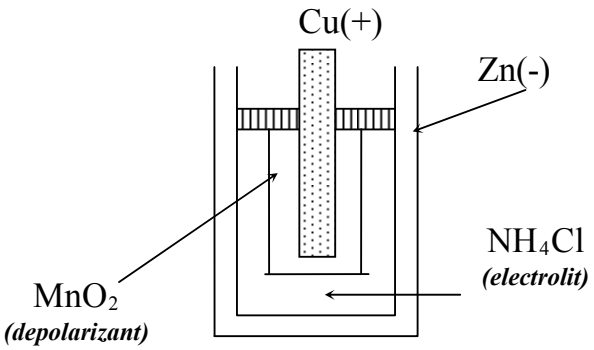


Figura 5.19

Observaţie. La ora actuală se construiesc o gamă variată de acumulatoare cu diverse sisteme (lanțuri).

5.7.2 Pile de combustie

Pilele de combustie sunt surse electrice care transformă energia chimică în energie electrică funcționând pe fenomenul invers electrolizei.

adnotații ……..

În figura 5.20. este reprezentată schematic o pilă de combustie în care electrozii (din Ni, Ag, Pt etc) poroşi sunt separați printr-un electrolit (KOH).

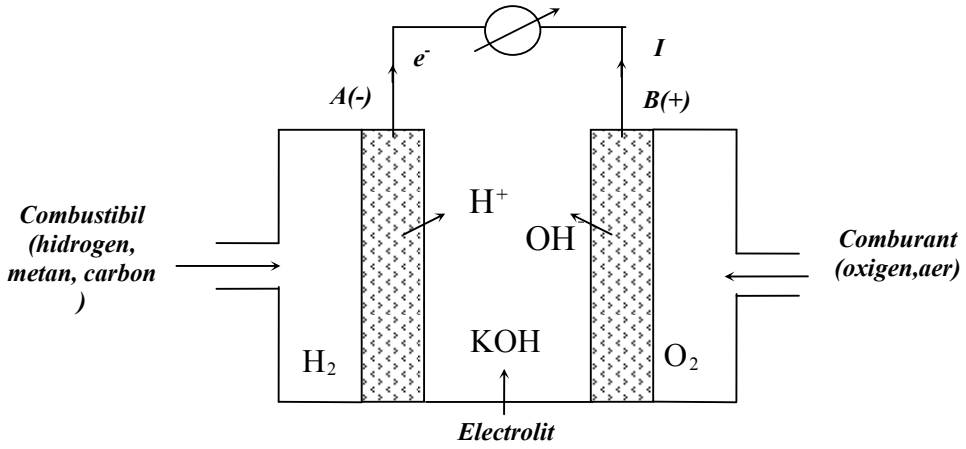


Figura 5.20

În electrodul A pătrunde hidrogenul care se ionizează pozitiv şi astfel placa devine negativă.

$$H_2 \rightarrow 2H \rightarrow 2H^+ .$$

În electrodul B se formează ionii OH^- cu electronii proveniți de la electrodul A, vezi figura 5.20.

În soluție, ionii H^+ şi OH^- se recombină formând apa iar în circuitul exterior circulă curentul I (electronii se deplasează de la electrodul A la electrodul B) T.e.m. a unei pile cu H_2, O_2 este de 0,7 V .

5.7.3 Pile termoelectrice.

Pilele termoelectrice transformă direct energia termică în energie electrică. Ele funcționează pe baza efectului Seebeck. Într-un sistem de conductoare metalice diferite ale căror suduri (contacte) se găsesc la temperaturi diferite ia naştere o tensiune termoelectrică a cărei valoare depinde numai de temperatura sudurilor şi de natura conductoarelor. Dacă temperaturile T_1 şi T_2

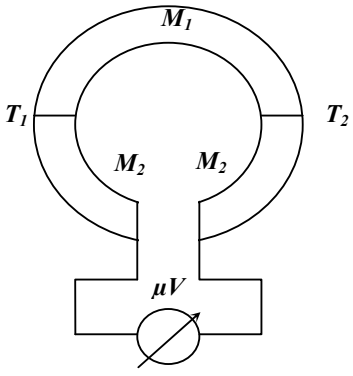


Figura 5.21

adnotații……

ale contactelor dintre metalele M_1 şi M_2 (figura 5.21) sunt egale atunci aparatul de măsură (μV -microvoltmetrul) nu indică nimic iar dacă $T_1 \neq T_2$ atunci aparatul indică existența unei tensiuni care este cu atât mai mare cu cât T_1 diferă mai mult de T_1.

Un astfel de sistem (lanț) constituit din două metale diferite ale căror contacte sunt la temperaturi diferite se numeşte termocuplu sau cuplu termoelectric. El poate fi utilizat ca sursă de t.e.m. sau traductor de temperatură.

5.7.4 Celule solare.

Celulele solare sau pilele fotoelectrice realizează conversia directă a energiei luminii (undei electromagnetice) în energie a curentului electric. Conversia menționată se poate realiza pe cale fotovoltaică, fotoelectrochimică, termoelectronică etc.

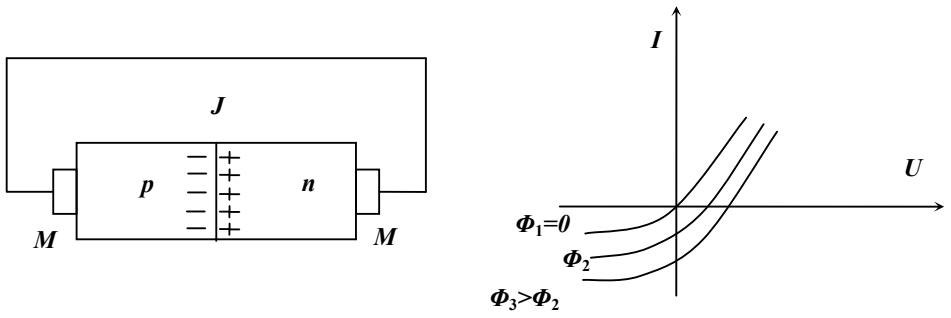


Figura 5.22

Dintre căile menționate mai sus, cea mai folosită în prezent este conversia fotovoltaică.

La contactul a două semiconductoare dopate diferit adică la o joncțiune p-n (figura 5.22.a) apare o diferență de potențial de contact, deci un câmp electric orientat de la n spre p. Dacă se scurtcircuitează o joncțiune p-n (figura 5.22.a) situată la întuneric nu va trece un curent prin circuitul exterior deşi există o diferență de potențial în joncțiune care este anulată de tensiunea de contact cu metalele M. Dacă joncțiunea este iluminată atunci fotonii absorbiți produc

adnotații ……..

perechi electron-gol care se vor deplasa în sensuri inverse sub acțiunea câmpului din joncțiune.

În circuit apare un curent electric care este mai intens dacă fluxul luminos este mai mare (figura 5.22.b)

6. MAGNETOSTATICA

Aşa cum s-a arătat în capitolul "Electrostatica", sarcinile electrice în repaus generează în jurul lor un câmp electric (electrostatic) care îşi manifestă prezența prin forțe care acționează asupra corpurilor încărcate electric situate în acel câmp. Altfel spus, sursele câmpului electrostatic sunt sarcinile electrice statice.

Corpurile polarizate magnetic (magnetizate), curenții de conducție, câmpul electric variabil în timp reprezintă sursele altui tip de câmp – câmpul magnetic. Câmpul magnetic îşi manifestă prezența prin forțe magnetice. Acestea pot fi:

forțe electromagnetice, care reprezintă acțiunea unui câmp magnetic asupra unui conductor parcurs de curent electric

$$(\vec{F} = I(\vec{l} \times \vec{B})); \qquad (6.1)$$

forțe Lorentz, care reprezintă acțiunea unui câmp magnetic asupra particulelor încărcate electric aflate în mişcare

$$(\vec{F} = q(\vec{\upsilon} \times \vec{B})); \qquad (6.2)$$

forțe electrodinamice, care reprezintă interacțiunea între conductoare parcurse de curent electric

$$(\left|\vec{F}\right| = \mu \frac{I_1 I_2}{2\pi d} l); \qquad (6.3)$$

forțe magnetostatice, care reprezintă interacțiunile dintre magneți permanenți sau între aceştia şi corpurile feromagnetice din apropiere.

Câmpul magnetic este caracterizat în fiecare punct al său printr-o mărime fizică vectorială numită inducție magnetică $\vec{B}$. Vectorul $\vec{B}$ determină acțiunea câmpului magnetic asupra corpurilor magnetizate, asupra conductoarelor parcurse de curenți electrici şi asupra sarcinilor electrice mobile. Mărimea $\vec{B}$ caracterizează câmpul magnetic într-un mediu dat şi este legată de o altă

mărime vectorială numită intensitate a câmpului magnetic $\vec{H}$, care caracterizează particularitățile geometrice (structura sau topologia) câmpului magnetic. Între $\vec{B}$ şi $\vec{H}$ există relația

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \tag{6.4}$$

unde μ se numeşte permeabilitate magnetică absolută şi caracterizează proprietățile magnetice ale mediului aşa cum permitivitatea electrică ε caracterizează proprietățile electrice ale acestuia.

În S.I. inducția magnetică se măsoară în tesla T, iar intensitatea câmpului magnetic în amperi pe metru $\mathrm{A/m}$.

Raportul dintre permeabilitatea μ a unui mediu şi permeabilitatea vidului μ_0,

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}, \tag{6.5}$$

poartă numele de permeabilitate relativă.

6.1 Câmpul magnetic al curentului electric

După cum s-a arătat în spațiul din jurul unui curent electric continuu (sau în jurul sarcinilor electrice ce se deplasează) se stabileşte o formă de existență a materiei numită *câmp magnetic*.

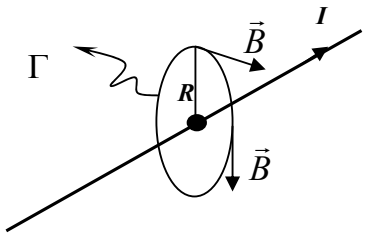


Figura 6.1

Determinările experimentale asupra intensității câmpului magnetic făcute de Biot şi Savart l-au condus pe Laplace la deducerea unei formule de calcul cunoscută sub numele de formula Biot-Savart-Laplace

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu I}{4\pi} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}, \tag{6.6}$$

adnotații ……..

unde $\mathrm{d}\vec{l}$ este elementul de lungime al unui curent de conducție de intensitate I iar r este distanța de la $\mathrm{d}\vec{l}$ la punctul în care se calculează inducția magnetică (figura 6.2).

Pentru un circuit închis, inducția câmpului magnetic într-un punct se calculează prin integrarea expresiei (6.6)

$$\vec{B} = \frac{\mu I}{4\pi}\oint \frac{\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}. \qquad (6.7)$$

Cu ajutorul lui (6.7) se poate calcula $\vec{B}$ pentru diverse contururi ale lui I (rectiliniu, circular etc.).

Astfel (vezi aplicații) pentru un curent rectiliniu infinit lung se găseşte

$$B = \mu H = \mu\frac{I}{2\pi r}, \qquad (6.8)$$

unde r este distanța de la I la punctul în care se calculează B (sau H).

În continuare ne propunem să analizăm câteva din proprietățile câmpului magnetic. Aşa cum s-a procedat în cazul câmpului electric vom calcula valoarea circulației vectorului inducție magnetică ($\vec{B}$) pe un contur închis din

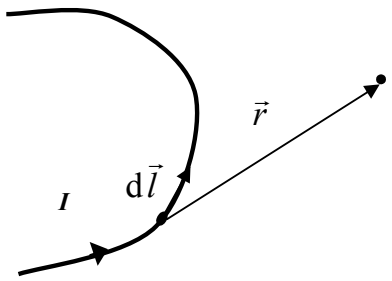


Figura 6.2

spațiul în care există câmp magnetic (figura 6.1).

Considerăm un contur circular, de rază R, cu centrul pe curentul liniar I, circulația vectorului $\vec{B}$ de-a lungul acestui contur este

$$\oint_\Gamma \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = B\oint_\Gamma \mathrm{d}l = \mu\frac{I}{2\pi R}\oint_\Gamma \mathrm{d}l = \mu\frac{I}{2\pi R}\cdot 2\pi R = \mu I. \qquad (6.9)$$

Relația (6.9) este cunoscută sub numele de forma integrală a *legii lui Ampère*.

Dacă se consideră o curbă închisă oarecare Γ care înconjoară mai mulți conductori prin care trec curenții $I_1, I_2, ..., I_n$ atunci legea lui Ampère se scrie

adnotații……

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \sum_{i=1}^{n} I_i \,. \qquad (6.10)$$

Câmpul magnetic creat de curenții staționari ($I = const.$) este static (nu depinde de timp) şi din acest motiv se numeşte *câmp magnetostatic*.

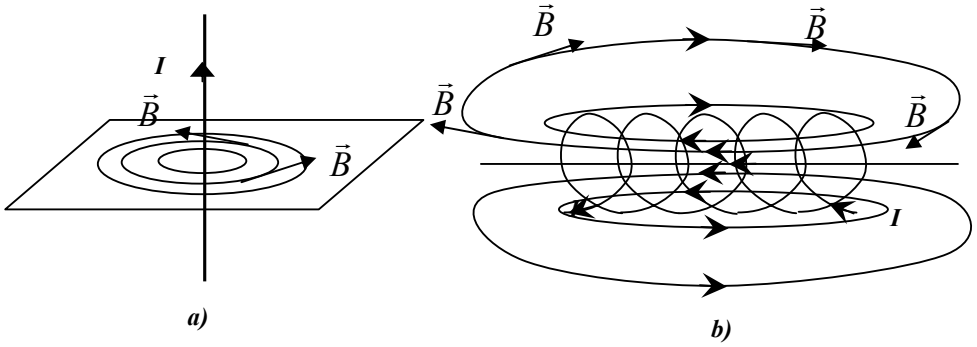


Figura 6.3

Ținând seama că

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{S} \mathrm{rot}\, \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \,, \qquad (6.11)$$

$$I = \int_{S} \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \,, \qquad (6.12)$$

relația (6.9) devine

$$\mathrm{rot}\, \vec{B} \equiv \nabla \times \vec{B} = \mu\, \vec{j} \qquad (6.13)$$

care exprimă forma diferențială a legii lui Ampère.

Relațiile (6.9) şi (6.13) scot în evidență *caracterul rotațional al câmpului magnetic*, adică liniile de câmp magnetic sunt curbe închise (figura 6.3). Deoarece

$$\mathrm{rot}\, \vec{B} = \mu\, \vec{j} \,,$$

rezultă că

$$\mathrm{div}\, \vec{B} \equiv \nabla \cdot \vec{B} = 0 \,. \qquad (6.14)$$

Se observă că mărimile $\vec{E}(\vec{D})$ apar numai în electrostatică iar $\vec{H}(\vec{B})$ numai în magnetostatică. Aceasta înseamnă că cele două câmpuri (electrostatic şi magentostatic) nu sunt interconectate adică electrostatica şi magnetostatica sunt

adnotații ……..

cazuri distincte şi valabile pentru sarcini electrice statice respectiv curenți în regim staționar.

Rezumat:

Electrostatică	*Magnetostatică*
$\operatorname{div}\vec{D}=\rho$	$\operatorname{div}\vec{B}=0$
$\operatorname{rot}\vec{E}=0$	$\operatorname{rot}\vec{H}=\vec{j}$

(6.15)

6.2 Forțe care acționează într-un câmp magnetic

6.2.1 Forța Lorentz

Forța cu care câmpul magnetic de inducție $\vec{B}$ acționează asupra unei particule cu sarcina q ce se deplasează cu viteza $\vec{v}$ în câmp se numeşte forța Lorentz (figura 6.4). Forța Lorentz este perpendiculară atât pe vectorul viteză cât şi pe vectorul inducție magnetică.

$$\vec{F}=q(\vec{v}\times\vec{B}) \tag{6.16}$$

6.2.2 Forța electromagnetică

Forța care acționează într-un câmp magnetic de inducție $\vec{B}$ asupra unui conductor de lungime $\vec{l}$ parcurs de un curent electric I poartă numele de forță electromagnetică (figura 6.5)

$$\vec{F}=I(\vec{l}\times\vec{B})\,. \tag{6.17}$$

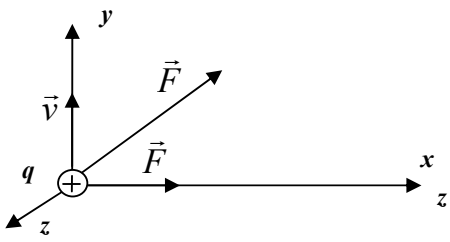


Figura 6.4

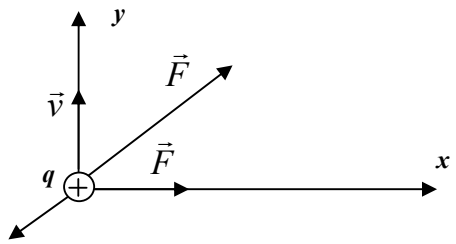


Figura 6.5

adnotații……

6.2.3 Forța electrodinamică

Forțele de interacțiune dintre două conductoare parcurse de curenți electrici poartă numele de forțe electrodinamice.

Considerând două conductoare rectilinii, infinit de lungi şi paralele prin care circulă curenții I_1 şi I_2, forța ce acționează asupra unei porțiuni de lungime *l* a

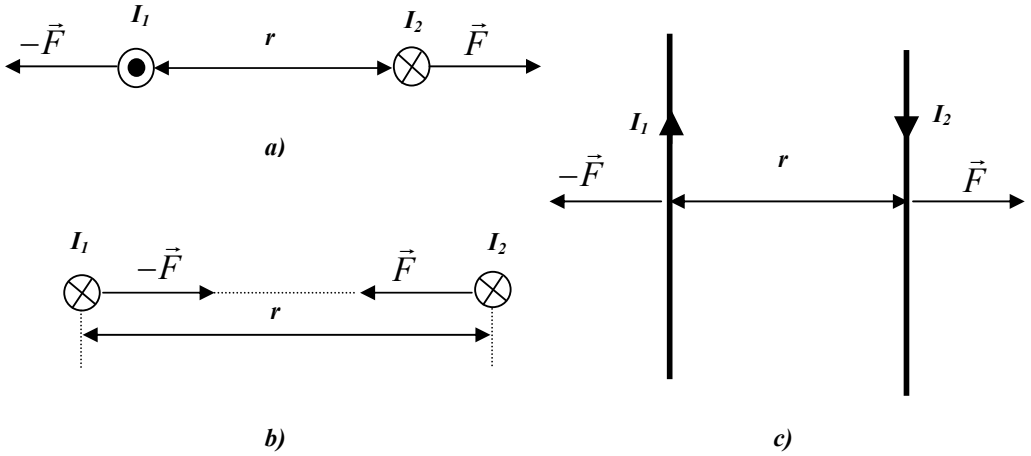


Figura 6.6

unuia dintre cele două conductoare între care există distanța r, este dată de relația

$$F = \mu \cdot \frac{I_1 \cdot I_2}{2\pi r} \cdot l \,. \qquad (6.18)$$

Forța electrodinamică este de atracție când cei doi curenți au acelaşi sens şi este de respingere când cei doi curenți au sensuri contrare.

6.3 Substanța în câmp magnetic

La studiul câmpului electric s-a arătat că un dielectric introdus într-un câmp electric se polarizează modificând câmpul în care a fost introdus.

O substanță introdusă într-un câmp magnetic se magnetizează (se polarizează magnetic) influențând câmpul magnetostatic al curenților continui.

Magnetizarea corpurilor poate fi temporară (se manifestă atâta timp cât corpul este supus acțiunii câmpului magnetic exterior) şi permanentă (se manifestă şi după dispariția câmpului magnetic exterior). Deci studiul proprietăților magnetice ale substanțelor şi a proceselor de magnetizare se poate face prin analogie cu studiul proprietăților dielectricilor şi a proceselor de polarizare

✍ adnotații …..

electronică. Astfel, în cadrul unei tratări macroscopice se admite că magnetismul este determinat de prezența în substanțele magnetice a unor sarcini electrice în mişcare staționară, care determină curenți de intensitate constantă. Este vorba de existența unor curenți electrici la nivel molecular şi atomic care se numesc curenți legați (curenți amperieni) pentru a păstra analogia cu noțiunea de sarcină legată din cazul substanțelor dielectrice. Acestor curenți legați (figura 6.7) li se poate ataşa un moment magnetic

$$\vec{m} = I\vec{S} = IS\vec{n} \qquad (6.19)$$

unde S este aria conturului.

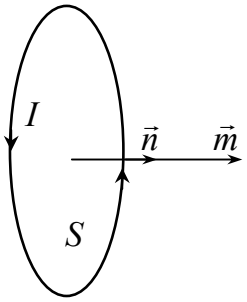


Figura 6.7

Curenților legați li s-a ataşat un moment magnetic deoarece ei se comportă ca un mic magnet numit dipol magnetic. Ca şi în cazul dipolului electric în câmp electric asupra dipolului magnetic situat în câmp magnetic acționează forțe a căror rezultantă este zero în cazul câmpurilor magnetice uniforme şi diferită de zero în câmpurile neuniforme. Momentul cuplului de forțe este:

$$\vec{C} = \vec{m} \times \vec{B} \qquad (6.20)$$

Cunoştințele actuale demonstrează că în realitate proprietățile magnetice ale substanțelor îşi au originea în mişcările orbitale şi de spin ale electronilor şi nucleonilor.

În continuare vor fi prezentate proprietățile magnetice ale substanțelor folosind "modelul curenților legați" care oferă o descriere mai simplă şi mai intuitivă.

După cum s-a mai arătat o substanță introdusă într-un câmp magnetic se magnetizează. Magnetizarea substanțelor este caracterizată prin vectorul magnetizare (sau intensitate de magnetizare) $\vec{M}$, a cărui mărime reprezintă momentul magnetic al unității de volum

adnotații……

$$\overrightarrow{M} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \overrightarrow{m}}{\Delta V} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{m}}{\mathrm{d}V}. \qquad (6.21)$$

În general, cu excepția unui grup de substanțe numite feromagnetice, magnetizația variază proporțional cu intensitatea câmpului magnetizant în care se află substanța

$$\overrightarrow{M} = \chi \overrightarrow{H}, \qquad (6.22)$$

unde χ (mărime adimensională) poartă numele de susceptivitate magnetică şi este o constantă de material care depinde, în general, de temperatură.

Când substanța este introdusă într-un câmp magnetic exterior de inducție $\overrightarrow{B_0}$ momentele magnetice ale moleculelor se orientează şi ca urmare substanța capătă un moment magnetic şi creează un câmp magnetic, $\overrightarrow{B_m}$, care se suprapune peste câmpul $\overrightarrow{B_0}$. Câmpul rezultat este

$$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{B_0} + \overrightarrow{B_m} = \mu_0 \overrightarrow{H} + \mu_0 \overrightarrow{M} = \mu_0 \overrightarrow{H} + \mu_0 \chi \overrightarrow{H} = \mu_0 (1+\chi) \overrightarrow{H} = \mu_0 \overrightarrow{H}\,. \quad (6.23)$$

Deoarece $\mu = \mu_0 \mu_r$, rezultă

$$\mu_r = 1 + \chi\,. \qquad (6.24)$$

Spre deosebire de susceptivitatea electrică, care ia numai valori pozitive (vectorul polarizație $\vec{P}$ dintr-un dielectric izotrop este orientat totdeauna în acelaşi sens cu câmpul $\vec{E}$), susceptivitatea magnetică χ, poate fi atât negativă cât şi pozitivă. În funcție de semnul şi valoarea susceptivității, substanțele pot fi clasificate astfel:

a) substanțe *diamagnetice* (Bi, Hg, Cu, H_2O, He, Ne, Ar etc.) ale căror molecule nu posedă momente magnetice proprii. Aceste substanțe se magnetizează prin inducție deoarece câmpul magnetic extern creează prin inducție momente magnetice elementare la nivelul fiecărui atom sau moleculă; pentru aceste substanțe $\chi < 0$ (cu valori foarte mici) iar vectorii $\overrightarrow{M}$ şi $\overrightarrow{H}$ au aceeaşi direcție dar sunt de sens opus.

b) substanțe *paramagnetice* (Na, K, Ca, Mg, Al, O_2 etc.) ale căror molecule (atomi) posedă momente magnetice proprii de valori diferite de zero şi în lipsa câmpului magnetic extern. În prezența unui câmp magnetic extern momentele magnetice moleculare se orientează în sensul acestui câmp şi deci pentru

adnotații ……..

substanțele paramagnetice $\chi>0$ (cu valori mici) iar $\vec{M}$ şi $\vec{H}$ au aceeaşi direcție şi sens.

c) substanțe *feromagnetice* (Fe, Ni, Co, Gd etc.) care au $\chi>>0$ şi cu valori mari. Spre deosebire de substanțele diamagnetice şi paramagnetice, pentru care χ este constant (pentru un T dat) şi deci legătura între $\overrightarrow{M}$ şi $\overrightarrow{H}$ este liniară, la substanțele feromagnetice susceptivitatea magnetică este o funcție de intensitatea câmpului magnetic. Legătura dintre $\overrightarrow{M}$ şi $\overrightarrow{H}$ este reprezentată în figura 6.8*a* şi poartă numele de curbă histerezis. Se observă că odată cu creşterea lui $\overrightarrow{H}$ magnetizația $\overrightarrow{M}$ parcurge curba OS ajungând la valoarea de saturație M_S. Micşorând câmpul, corpurile feromagnetice rămân magnetizate astfel încât pentru $\overrightarrow{H}=0$ magnetizația rămasă, $\overrightarrow{M}_r$, se numeşte remanentă. Magnetizarea corpurilor se poate anula numai dacă li se aplică acestora un câmp magnetic exterior de sens invers şi de o anumită valoare H_C, numit câmp coercitiv. Această comportare se explică prin existența în substanța

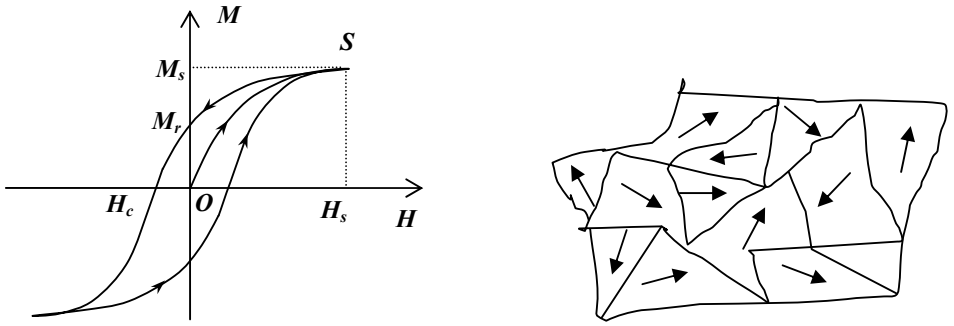


Figura 6.8

feromagnetică a unor domenii de magnetizare spontană (figura 6.8*b*).

De regulă, în lipsa câmpului magnetic exterior corpul posedă o mulțime de domenii de magnetizare orientate haotic în aşa fel încât $M=0$. La aplicarea unui câmp magnetic exterior are loc o orientare a domeniilor de magnetizare (a momentelor magnetice) pe direcția câmpului. Când toate domeniile sunt orientate se atinge magnetizația de saturație M_S. Pentru $H=0$ parte din

domenii rămân orientate ceea ce determină magnetizarea remanentă. Peste o anumită temperatură specifică, numită temperatură Curie (T_C), substanțele feromagnetice devin paramagnetice.

Se disting două clase de materiale feromagnetice:

materiale magnetice moi (aliaje Fe-Si) ale căror permeabilități magnetice relative au valori mari dar au arii ale buclelor de histerezis mici. Deoarece aria buclei de histerezis este o măsură a energiei disipate sub formă de căldură în procesul magnetizării unității de volum această clasă de substanțe este utilizată pentru realizarea tolelor de transformator şi a miezurilor de electromagneți;

materiale magnetice dure a căror arie de histerezis este mare şi deci sunt caracterizate prin câmpuri coercitive şi magnetizări remanente ridicate. Astfel de materiale se folosesc la realizarea magneților permanenți.

d) substanțe *ferimagnetice* (cunoscute sub denumirea de ferite) sunt o clasă de substanțe cu proprietăți magnetice interesante la care se pune în evidență fenomenul de histerezis. Prezintă însă, în raport cu substanțele feromagnetice,

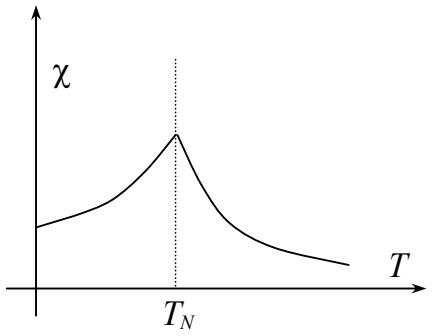


Figura 6.9

avantajul de a avea o conductibilitate electrică redusă., ceea ce le conferă un larg câmp de aplicabilitate în electronică.

e) substanțe *antiferomagnetice* (Mn, Cr, MnO, o serie de oxizi, halogeni etc.) la care χ depinde de temperatura absolută T, după o curbă reprezentată în figura 6.9. Peste temperatura T_N (denumită temperatură Néel) aceste substanțe prezintă proprietăți paramagnetice.

adnotații ……..

7. MIŞCAREA PARTICULELOR ÎN CÂMPURI ELECTRICE ŞI MAGNETICE

7.1 Introducere

Forța rezultantă ce acționează asupra unei particule de masă m încărcată cu sarcina electrică q, care se mişcă cu viteza $\vec{v}$ într-o regiune a spațiului în care există simultan un câmp electric cu intensitatea $\vec{E}$ şi un câmp magnetic cu inducția magnetică $\vec{B}$ este

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\left(\vec{v}\times\vec{B}\right), \tag{7.1}$$

unde $q\vec{E}$ este componenta datorată câmpului electric iar $q\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)$ este componenta datorată câmpului magnetic (forța Lorentz).

În limitele mecanicii clasice când $m = m_0$ (unde m_0 reprezintă masa de repaus a particulei, expresia forței (7.1) poate fi scrisă şi astfel

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = q\,\vec{E} + q\left(\vec{v}\times\vec{B}\right). \tag{7.2}$$

7.2 Mişcarea în câmp electric static

În acest caz $\vec{B} = 0$ şi $\vec{E} = ct.$ în tot spațiul în care are loc mişcarea particulei încărcate electric (figura 7.1) şi ecuația (7.2) devine

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = q\,\vec{E}. \tag{7.3}$$

Integrând (7.3) se găseşte

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \frac{q}{m}\vec{E}t, \tag{7.4}$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{q}{2m}\vec{E}t^2. \tag{7.5}$$

În foarte multe cazuri este însă convenabil să se rezolve problema descompunând mişcarea în două mişcări rectilinii: o mişcare rectilinie pe o direcție perpendiculară pe câmp (axa Ox, figura 7.1) şi una paralelă cu câmpul electric (axa Oy, figura 7.1).

adnotații……

În acest caz, considerând că la $t=0$, $\vec{r}=\vec{r}_0=x_0\vec{i}+y_0\vec{j}$, ecuația (7.3), pe componente se scrie

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}_x}{\mathrm{d}t}=0, \tag{7.6}$$

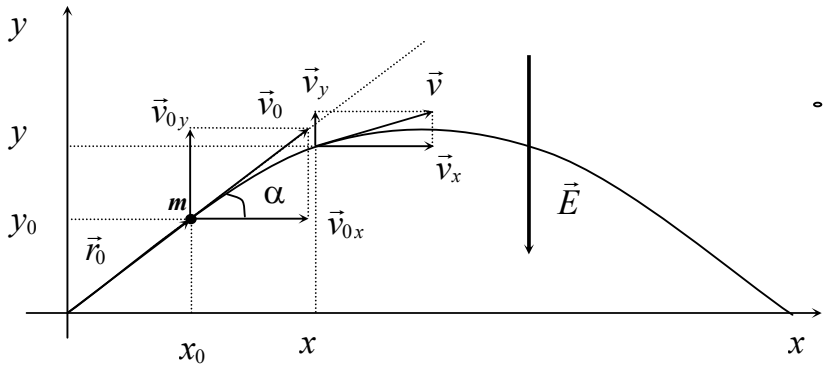


Figura 7.1

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}_y}{\mathrm{d}t}=-q\vec{E}\,. \tag{7.7}$$

Rezolvând (integrând) ecuațiile (7.6) şi (7.7) , se găseşte

$$v_x=ct.=v_{0x}=v_0\cos\alpha\,,\ x=x_0+v_{0x}t\,, \tag{7.8}$$

$$v_y=v_{0y}-\frac{qE}{m}t\,,\ y=y_0+v_{0y}t-\frac{qE}{2m}t^2\,, \tag{7.9}$$

$$\vec{v}=v_x\vec{i}+v_y\vec{j}\,,\ \vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}\,, \tag{7.10}$$

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}\,. \tag{7.11}$$

7.3 Mişcarea în câmp magnetic

7.3.1 Mişcarea în câmp magnetic transversal şi omogen

Considerăm o particulă încărcată electric care pătrunde cu viteza $\vec{v}_0$ perpendicular pe liniile unui câmp magnetic omogen de inducție $\vec{B}$. Forța cu care va acționa câmpul magnetic asupra particulei, $q\left(\vec{v}_0\times\vec{B}\right)$, va fi tot timpul perpendiculară pe planul vectorilor $\vec{v}_0$ şi $\vec{B}$ iar traiectoria descrisă va fi un cerc în planul vectorilor $\vec{F}$ şi $\vec{v}_0$ (figura 7.2).

Deoarece forța magnetică are rol de forță centripetă

adnotații ……..

$$qv_0B = \frac{mv_0^2}{R}, \tag{7.12}$$

pentru raza traiectoriei circulare se obține

$$R = \frac{mv_0}{qB}. \tag{7.13}$$

Dacă viteza v_0 se obține în urma accelerării într-un câmp electric sub o diferență de potențial U , atunci , din legea conservării energiei

$$qU = \frac{mv_0^2}{2}, \tag{7.14}$$

se obține pentru raza traiectoriei expresia

$$R = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mU}{q}}. \tag{7.15}$$

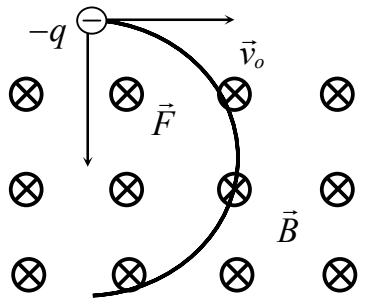


Figura 7.2

Perioada de rotație este

$$T = \frac{2\pi R}{v_0} = 2\pi\frac{m}{qB}. \tag{7.16}$$

Se observă că perioada de rotație nu depinde de viteza cu care particula pătrunde în câmpul magnetic.

7.3.2 Mişcarea în câmp magnetic omogen

Dacă viteza particulei $\vec{v}_0$ face un unghi α cu direcția liniilor de câmp, pentru studiul mişcării se alege axa Ox în lungul liniilor de câmp magnetic iar axa Oy în planul vectorilor $\vec{v}_0$ şi $\vec{B}$ (figura 7.3).

Se descompune viteza $\vec{v}_0$ în două componente $\vec{v}_{0x}$ şi $\vec{v}_{0y}$ după direcțiile celor două axe. Componenta $\vec{v}_{0x}$, pentru care forța este nulă, face ca particula să se

deplaseze uniform în direcția câmpului iar datorită componentei $\vec{v}_{0y}$ apare o forță $qv_{0y}B$ care imprimă particulei o mişcare circulară într-un plan perpendicular pe direcția câmpului. Din compunerea celor două mişcări se obține o mişcare elicoidală cu axa paralelă cu direcția câmpului magnetic şi având raza

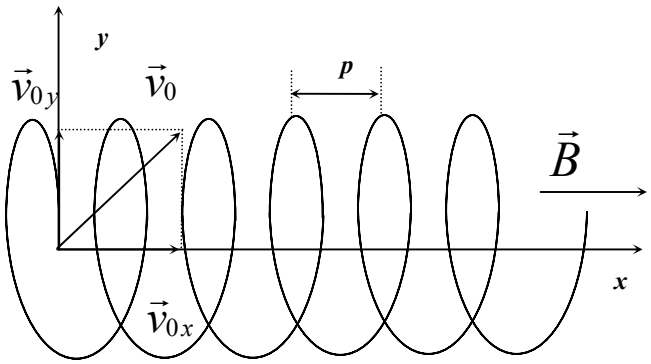


Figura 7.3

$$R = \frac{mv_{0y}}{qB} = \frac{mv_0 \sin\alpha}{qB}. \qquad (7.17)$$

Pasul *P* al elicei este spațiul parcurs de particulă după direcția câmpului în timp de o perioadă *T*

$$P = v_{0x}T = v_{0x}2\pi\frac{m}{qB} = 2\pi\frac{mv_0\cos\alpha}{qB}. \qquad (7.18)$$

Dacă unghiul α este foarte mic, atunci $\cos\alpha \approx 1$ şi (7.18) devine

$$P = 2\pi\frac{mv_0}{qB}. \qquad (7.19)$$

Deci sub acțiunea unui câmp magnetic un fascicul slab divergent la intrare este focalizat după parcurgerea distanței P în direcția câmpului.

7.4 Aplicații

7.4.1 Filtre de viteze

Filtrele de viteze sau monocromatoarele de particule încărcate sunt dispozitivele cu ajutorul cărora se selectează un fascicul monocinetic de particule dintr-un fascicul de particule cu energii diferite. Funcționarea lor se

adnotații ……..

bazează pe mişcarea particulelor încărcate în combinații convenabile de câmpuri electrice şi magnetice.

Cel mai simplu filtru de viteze se obține făcând să treacă un fascicul de particule încărcate electric printr-un câmp electric şi unul magnetic, încrucişate la 90^0, având intensitățile astfel alese încât forțele exercitate de ele asupra

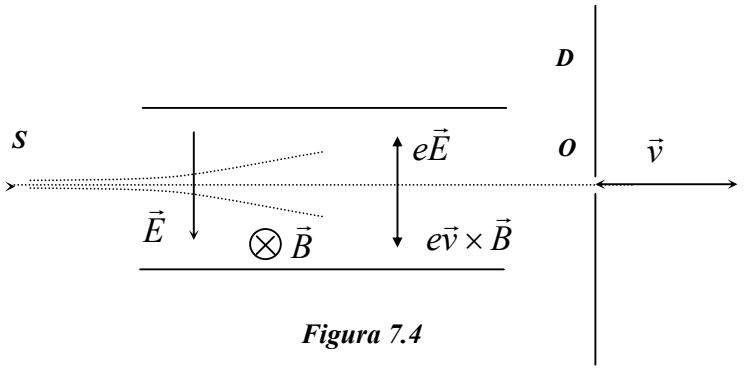


Figura 7.4

particulelor să fie egale şi de sensuri contrare. În figura 7.4 este ilustrat modul de funcționare a unui astfel de filtru de viteze în care câmpul electric este obținut între armăturile unui condensator plan.

Fasciculul de particule încărcate electric este un fascicul de electroni ($q = -e$) de viteze diferite care provine de la o sursă S. La extremitatea condensatorului, opusă celei prin care pătrunde fasciculul, se află un paravan D prevăzut cu un orificiu fin O prin care va ieşi fasciculul monocinetic de electroni având viteza v. Ceilalți electroni vor fi deviați de la direcția inițială.

Deci, vor trece nedeviați prin cele două câmpuri acei electroni pentru care

$$eE = evB\,, \tag{7.20}$$

adică acei electroni care au viteza

$$v = \frac{E}{B}\,. \tag{7.21}$$

Dacă $mv^2/2$ este energia cinetică pe care o capătă electronul pe seama lucrului mecanic eU efectuat de câmpul electric accelerator ($mv^2/2 = eU$), atunci din (7.21) se obține

$$\frac{e}{m} = \frac{E}{2UB^2}\,. \tag{7.22}$$

adnotații……

Relația (7.22) dă legătura dintre tensiunea de accelerare U şi sarcina specifică pentru care electronii trec prin filtrul cu E şi B dați.

Un alt tip de filtru, foarte des utilizat, funcționează pe baza acțiunii unui câmp electric radial al unui condensator, de formă semicilindrică, asupra particulelor încărcate electric (figura 7.5). O particulă de masă m şi sarcină q se va deplasa în interiorul condensatorului pe o traiectorie circulară de rază r dacă

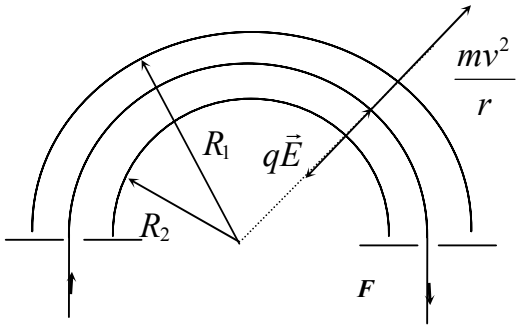


Figura 7.5

$$\frac{mv^2}{r} = qE\,. \tag{7.23}$$

Deoarece câmpul este de simetrie radială, $|E| = \mathrm{d}V/\mathrm{d}r$, egalitatea (7.23) devine

$$\frac{mv^2}{r} = q\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\,.$$

Separând variabilele şi integrând

$$\int_{R1}^{R2}\frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{q}{mv^2}\int_{V1}^{V2}\mathrm{d}V\,,$$

se obține

$$v = \sqrt{V_2 - V_1}\cdot\sqrt{\frac{q}{m\cdot\ln\frac{R_1}{R_2}}}\,. \tag{7.24}$$

Se vede că particulele vor avea o traiectorie circulară cu viteza v şi deci vor putea părăsi condensatorul prin fanta F numai acelea care au viteza data de

adnotații ……..

relația (7.24). Pentru diferite diferențe de potențial $V_1 - V_2$ între armăturile condensatorului se pot obține fascicule monocinetice de diferite energii.

7.4.2 Tubul catodic

Tubul catodic sau tubul cu fascicul dirijat funcționează pe baza deviațiilor unui fascicol de electroni în câmpuri electrice şi magnetice. Părțile componente principale ale unui tub catodic, prezentat în figura 7.6., sunt următoarele: balonul vidat B, filamentul F, catodul K, grila G, anodul A şi electrozii plan paraleli (sau bobine) (P_1, P_2).

Balonul este confecționat din sticlă şi în interiorul acestuia se realizează un vid

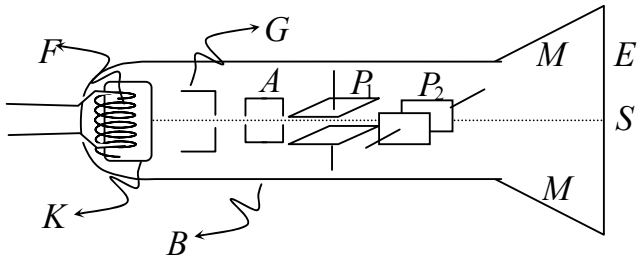


Figura 7.6

înaintat. Porțiunea E a balonului, numită ecran, este acoperită cu o substanță fluorescentă care are proprietatea de a emite radiații luminoase în locurile lovite de un fascicul de electroni. Peretele interior M se metalizează şi este pus la un potențial pozitiv pentru a capta electronii secundari emişi de ecranul fluorescent.

Catodul este o sursă de electroni obținuți prin efect termoelectric. Catodul, împreună cu grila, care are rolul de a comanda densitatea fluxului de electroni şi deci strălucirea urmei luminoase (numită spot S) de pe ecranul fluorescent, poartă numele de tun electronic.

Anodul are rolul de concentrare şi accelerare a fasciculului de electroni care pătrund în continuare în dispozitivul de deflexie format din electrozii plani sau bobinele P_1 şi P_2. Dispozitivul de deflexie are rolul de a crea câmpuri care să devieze fascicolul de electroni pe verticală P_1 şi pe orizontală P_2. Deviațiile sunt cu atât mai mari cu cât intensitățile câmpurilor sunt mai mari.

adnotații……

Tubul catodic este folosit pentru studiul diferitelor fenomene care pot da naştere unor diferențe de potențial ce urmează a fi aplicate electrozilor P_1. La electrozii P_2 se aplică un semnal sub formă de dinte de ferăstrău pentru deplasarea spotului pe orizontală (în timp). În timpul cât semnalul creşte, spotul se deplasează pe orizontală până la marginea ecranului şi urmăreşte pe verticală semnalul aplicat electrozilor P_1, semnal care provine de la fenomenul de studiat. O dată cu ajungerea spotului la marginea ecranului, semnalul se reduce brusc la zero şi concomitent grila se negativează puternic. Aceasta face ca luminozitatea spotului să fie nulă în perioada cât acesta se reîntoarce în poziția inițială datorită lipsei semnalului (câmpului) la electrozii P_2 Repetarea rapidă a fenomenelor descrise mai sus lasă impresia unei curbe continue pe ecranul tubului catodic.

Tuburile catodice îşi găsesc aplicații în diferite domenii ca: receptoare de televiziune, radar, osciloscoape, monitoare etc.

7.4.3 Spectrometrul de masă

Spectrometrele de masă sunt aparate care determină sarcinile specifice ale particulelor electrizate folosind acțiunile câmpurilor electrice şi magnetice. Schema de principiu a unui spectrometru de masă este reprezentată în figura 7.7.

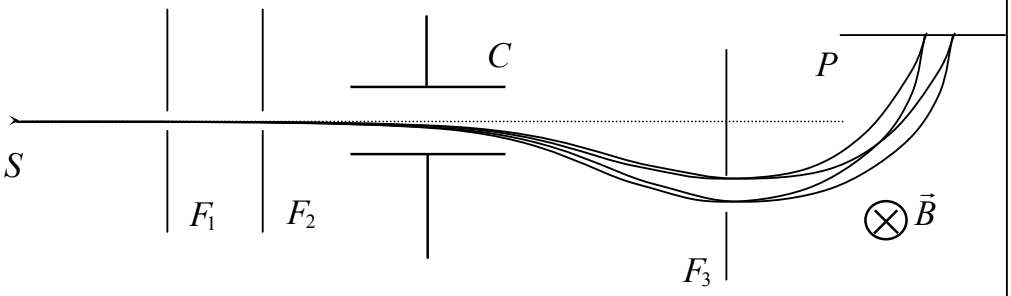


Figura 7.7

adnotații ……..

Fasciculul de particule încărcate provenit de la sursa S este colimat de fantele (diafragmele) F_1 şi F_2, după care pătrunde într-un câmp electric creat de către condensatorul C.

Fanta F_3 permite trecerea unui fascicul de particule cu q/m diferit dar având un interval foarte mic de energie (datorită dispersiei după energie din câmpul electric).

Câmpul magnetic în care pătrunde acest fragment de fascicul produce deviații dar în sens contrar celor produse de câmpul electric. Alegând convenabil geometria şi intensitatea câmpului magnetic se pot focaliza particulele electrizate cu acelaşi q/m dar cu viteze diferite într-un punct pe receptorul (detectorul) P.

În felul acesta ionii cu q/m diferit vor fi focalizați în puncte diferite; deviațiile după viteze din câmpul electric sunt compensate în câmpul magnetic.

7.4.4 Determinarea sarcinii specifice a electronului

Există foarte multe metode pentru determinarea sarcinii specifice a electronului. Se vor descrie două dintre aceste metode bazate pe mişcarea unui fascicul de electroni în câmpuri electrice şi magnetice.

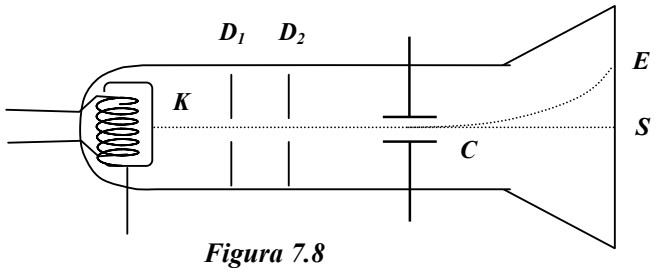


Figura 7.8

Metoda J. J. Thomson. Un fascicul de electroni emişi de catodul K este accelerat şi colimat în spațiul dintre catod şi diafragmele D_1 şi D_2 (figura 7.8). Cu viteza căpătată fasciculul pătrunde perpendicular pe un ansamblu de două câmpuri, unul electric şi altul magnetic.

Intensitățile şi sensurile celor două câmpuri se aleg astfel încât cele două deviații produse să fie egale şi de sens contrar. Vor trece nedeviați acei electroni din fascicul pentru care viteza este dată de relația (7.21) ; în acest caz

spotul luminos cade în centrul ecranului E. Se întrerupe câmpul electric şi se măsoară deviația produsă în câmpul magnetic care serveşte la determinarea razei traiectoriei circulare. Introducând expresia vitezei în aceea a razei se obține pentru sarcina specifică

$$\frac{e}{m}=\frac{E}{RB^2}. \qquad (7.25)$$

Metoda celor două condensatoare. Aceasta este o metodă de zero şi utilizează mişcarea unui fascicul de electroni într-un ansamblu de două condensatoare alimentate de la o sursă de tensiune de înaltă frecvență. Fasciculul de electroni obținut prin efect termoelectric de la catodul K este accelerat sub diferența de potențial U aplicată anodului A şi colimat de diafragma D_1 (figura 7.9). După aceasta pătrunde între plăcile condensatorului C_1, unde suferă deviații pe verticală; vor trece nedeviați doar acei electroni care vor pătrunde în condensatorul C_1 în momentul când tensiunea aplicată acestuia trece prin valoarea zero. Electronii nedeviați vor trece prin orificiul diafragmei D_2 şi vor pătrunde între armăturile condensatorului C_2. Dacă distanța l între cei doi condensatori este astfel aleasă încât electronii să ajungă în condensatorul C_2 în momentul când tensiunea trece prin valoarea zero, atunci fasciculul trece fără să fie deviat.

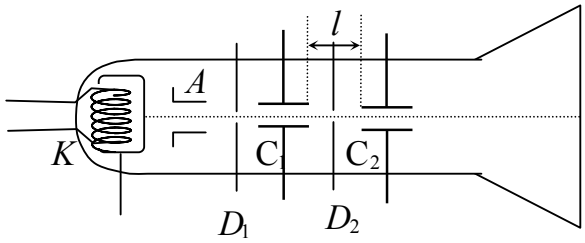


Figura 7.9

Deci fasciculul de electroni va trece nedeviat prin ambele condensatoare dacă timpul t, necesar parcurgerii distanței l între cei doi condensatori ($t=l/v$) este un multiplu întreg al semiperioadei tensiunii de alimentare

$$\frac{l}{v}=n\frac{T}{2}, \qquad (7.26)$$

adnotații ……..

unde v este viteza electronilor accelerați sub diferența de potențial U. Utilizând expresia (7.14) pentru această viteză şi introducând-o în (7.26) se obține pentru sarcina specifică

$$\frac{e}{m}=\frac{2l^2}{n^2T^2U}. \qquad (7.27)$$

Valorile găsite pentru sarcina specifică a electronului depind de viteză. Acest lucru se datorează faptului că masa depinde de viteză conform teoriei relativității a lui Einstein.

Valoarea sarcinii specifice a electronului este

$$\frac{e}{m}=1.759\cdot 10^{11}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{kg}}.$$

Cunoscând $e=1,602\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$ se găseşte pentru masa de repaus a electronului $m_o=9,1\cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$.

7.4.5 Acceleratoare de particule

Acceleratoarele de particule sunt instalații complexe cu ajutorul cărora particulele încărcate electric sunt accelerate până la viteze (energii cinetice) foarte mari, utilizând acțiunea câmpurilor electrice şi magnetice. Scopul pentru care sunt construite este studiul structurii nucleului atomic, a reacțiilor nucleare şi particulelor elementare etc.

Acceleratoarele se pot clasifica după mai multe criterii: după forma traiectoriei (acceleratoare liniare, acceleratoare ciclice), după valorile energiilor imprimate particulelor (nerelativiste şi relativiste), după tipul particulelor accelerate (acceleratori de electroni şi acceleratori de protoni, deuteroni, particule α etc.).

Acceleratorul liniar. Schema de principiu a unui accelerator liniar de ioni este reprezentată în figura 7.10. Părțile componente principale ale acestuia sunt: camera vidată CV, sursa de ioni S, electrozi metalici $(1,2,3,\ldots)$ şi generatorul de înaltă frecvență IF. Ionii proveniți de la sursa S pătrund în cilindrul metalic (electrodul) 1 în care, datorită faptului că intensitatea câmpului electric este nulă, au o mişcare uniformă. În regiunea dintre cilindrii 1 şi 2 ionii găsesc un potențial accelerator care măreşte energia acestora cu qU, unde q este sarcina, iar U este diferența de potențial dintre cei doi cilindrii. Dacă după parcurgerea celui de al doilea cilindru ionii găsesc din nou

un potențial accelerator, atunci vor căpăta o nouă cantitate de energie qU. Pentru ca de fiecare dată ionii să găsească între cilindrii un potențial accelerator, este necesar ca timpul t în care aceştia parcurg un cilindru să fie egal cu semiperioada generatorului de înaltă frecvență. Deoarece după fiecare accelerare viteza ionilor este tot mai mare, rezultă că şi lungimea cilindrilor de-a lungul traseului acestora trebuie să fie tot mai mare.

Lungimea l_n a cilindrului n de accelerare este

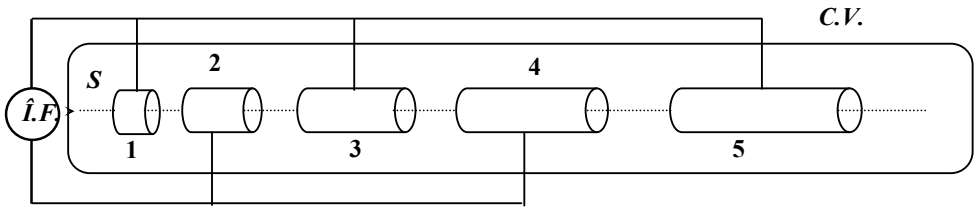


Figura 7.10

$$l_n = v_n t = v_n \frac{T}{2}, \tag{7.28}$$

unde v_n este viteza căpătată după n accelerări de ionul de masă m. Expresia acesteia este

$$v_n = \sqrt{\frac{2nqU}{m}}. \tag{7.29}$$

Astfel, pentru lungimea cilindrului n se obține

$$l_n = \sqrt{\frac{nqU}{2m}}. \tag{7.30}$$

Relația de mai sus este valabilă pentru particule încărcate nerelativiste.

Realizarea practică a unor astfel de acceleratoare ridică probleme de natură tehnică legate de lungimea mare pe care ar trebui să o aibă acestea pentru a obține viteze mari şi de pierderile mari de energie la transmisia acesteia pentru frecvențe foarte înalte.

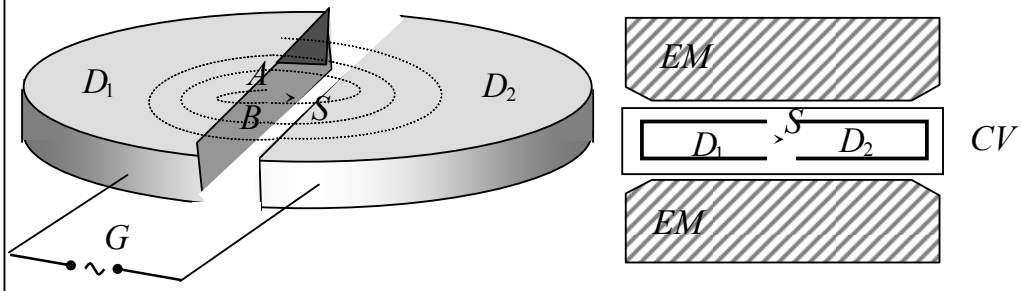
De aceea acceleratoarele liniare moderne se construiesc dintr-o singură cavitate de rezonanță care conține electrozi acceleratori şi în care mecanismul de accelerare este identic cu cel descris mai sus. Acceleratoarele liniare pentru electroni sunt ghiduri de undă în care aceştia câştigă energie de la componenta

adnotații ……..

electrică axială a undei progresive care se propagă de-a lungul ghidului şi a cărei viteză de fază este egală cu viteza electronilor.

Ciclotronul este un accelerator ciclic nerelativist destinat accelerării particulelor grele cum ar fi protoni, particule α, deuteroni etc. Schema de principiu este reprezentată în figura 7.11.

Ciclotronul este constituit din doi electrozi numiți duanți (D_1, D_2), situați într-o cameră vidată CV . Duanții au fiecare forma unui semicilindru cu înălțimea mult mai mică decât raza. Ei sunt alimentați de la o sursă de tensiune de înaltă frecvență G şi în felul acesta în spațiul dintre duanți ia naştere un câmp electric; acest câmp este nul în interiorul lor. Camera vidată împreună cu cei doi electrozi este plasată între polii unui electromagnet (EM) care creează un câmp magnetic perpendicular pe planul duanților.



a) *b)*

Figura 7.11

Ionii proveniți de la sursa S sau care sunt introduşi din exterior, sunt accelerați în câmpul electric dintre duanți (porțiunea SA de pe traiectorie). Cu viteza căpătată în urma accelerării ionii pătrund perpendicular pe câmpul magnetic din D_1 urmând o traiectorie circulară (porțiunea AB). Dacă în acest interval de timp tensiunea de alimentare a duanților şi-a schimbat semnul, ionii vor găsi iarăşi un câmp accelerator şi vor pătrunde în duantul D_2 cu o viteză mărită. Timpul cât are loc o rotație completă este

$$t = \frac{2 \cdot \pi \cdot m}{q \cdot B} \qquad (7.31)$$

şi trebuie să fie egal cu perioada tensiunii de alimentare a duanților.

adnotații……

Pe măsură ce particula este accelerată, raza traiectoriei creşte (vezi figura 7.13) şi aspectul traiectoriei este cel al unei spirale. După atingerea energiei finale electronii sunt extraşi din ciclotron cu un electrod de deflexie.

Energia maximă ce poate fi obținută cu un ciclotron este limitată datorită efectelor relativiste. Ținând seama că masa unei particule depinde de viteză

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \tag{7.32}$$

pentru viteze mari timpul cât particula efectuează o rotație completă este

$$m = \frac{2\pi m_0}{qB\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{7.33}$$

Se observă că acest timp creşte pe măsură ce particula îşi măreşte viteza. Dacă sursa de tensiune nu – şi măreşte şi ea corespunzător perioada atunci ionii nu mai găsesc între duanți un câmp de accelerare. Efectele relativiste depind de masele ionilor care sunt accelerați. La electroni variația relativistă a masei este foarte mare şi de aceea ciclotronul nu poate fi utilizat la accelerarea electronilor, iar pentru protoni limita până la care pot fi accelerați este de aproximativ $22\ \text{MeV}$. Ionii "grei" însă pot fi accelerați cu ciclotronul.

Pentru a înlătura efectele rezultate din variația masei cu viteza se pot adopta soluții tehnice care să sincronizeze pătrunderea ionilor în câmpul electric accelerator cu schimbarea polarității tensiunii acceleratoare. Există două soluții: micşorarea treptată a frecvenței sursei de alimentare cu păstrarea câmpului magnetic constant şi a două bazată pe creşterea intensității câmpului magnetic cu păstrarea frecvenței constante. Corespunzător celor două soluții se construiesc acceleratoarele care poartă numele sincrociclotroane şi sincrotroane. Cu astfel de acceleratoare se pot accelera particule până la energii de ordinul zecilor şi chiar sutelor de GeV.

Betatronul este un tip special de accelerator destinat accelerării electronilor. El funcționează pe baza fenomenului de inducție electromagnetică. Betatronul este format dintr-o cameră de accelerare inelară construită din sticlă sau ceramică şi montată în întrefierul unui electromagnet. Electromagnetul are rolul de a crea un câmp magnetic variabil în timp şi cu o anumită configurație spațială. Câmpul magnetic variabil în timp dă naştere unui câmp electric

adnotații ……..

rotațional care are rolul de accelera electronii. Aceştia sunt injectați în camera de accelerare utilizând un tun electronic plasat la marginea acesteia. Configurația spațială a câmpului magnetic este astfel aleasă încât în tot timpul accelerării să fie asigurată menținerea electronilor pe traiectoria circulară şi realizată focalizarea fasciculului. După accelerare fasciculul de electroni este îndreptat către o țintă unde prin frânare generează radiații electromagnetice (radiații X).

Betatroanele sunt utilizate la studiul reacțiilor fotonucleare, în industrie pentru defectoscopia nedistructivă şi în medicină.

7.4.6 Elemente de optică electronică

Analogia dintre fasciculele electronice şi fasciculele de lumină constă în proprietățile lor comune, de a fi deviate şi dispersate, de a suferi fenomene de interferență şi de difracție.

După cum o rază de lumină suferă o deviație atunci când trece dintr-un mediu transparent în alt mediu transparent cu indice de refracție diferit, tot aşa şi un fascicul electronic poate fi deviat când trece printr-o suprafață echipotențială a unui câmp electric, sub incidență diferită de zero.

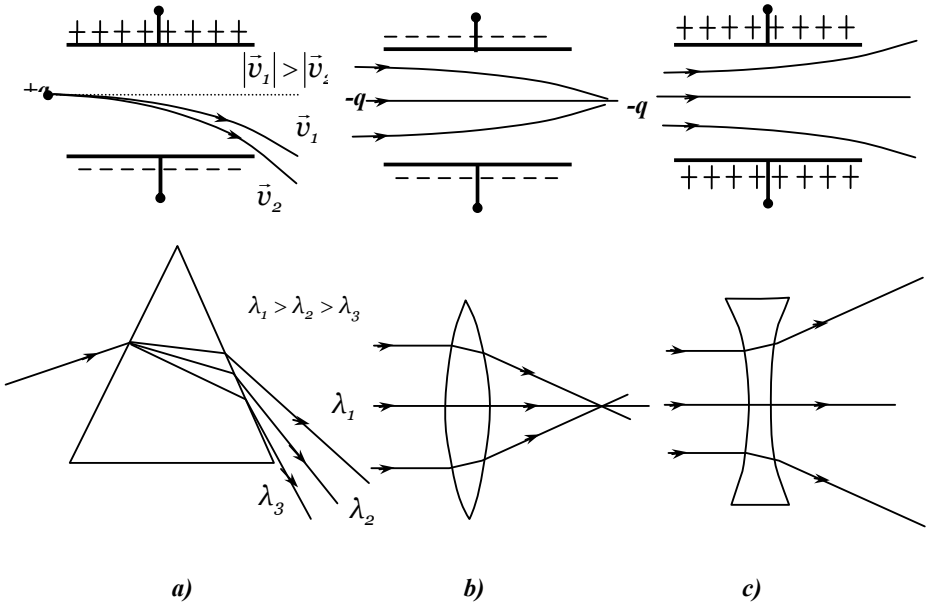


Figura 7.12

adnotații……

Dacă un fascicul de particule încărcate electric, având viteze diferite, trec printre armăturile unui condensator plan încărcat (câmp electric uniform), particulele cu viteze mai mici vor fi deviate mai mult decât cele cu viteze mai mari, întocmai cum la trecerea luminii albe (compuse) printr-o prismă, radiațiile cu frecvență mai mare vor fi deviate mai mult deoarece indicele de refracție este funcție de frecvență (figura 7.12*a*).

Tot pe baza fenomenelor descrise în acest paragraf se construiesc lentilele electronice (magnetice şi electrice, figura 7.12*b, c*).

Prin reunirea diverselor tipuri de lentile electronice se construiesc aparate complicate denumite microscoape electronice. Avantajul microscoapelor electronice în raport cu microscoapele optice constă în puterea lor separatoare (de rezoluție) mai mare, adică în capacitatea primelor de a pune în evidență detalii de mii de ori mai fine decât cele optice.

Avantajele microscoapelor electronice nu se datoresc imperfecțiunii microscoapelor optice, ci apar ca limitări fundamentale datorită efectelor de

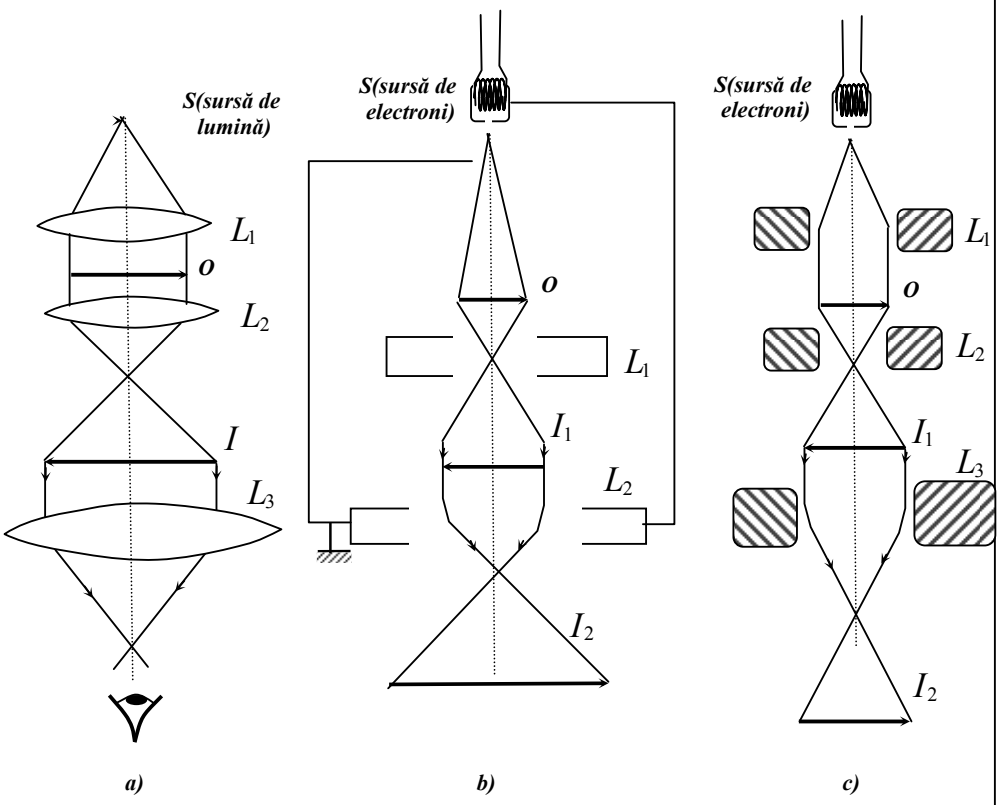


Figura 7.13

adnotații ……..

difracție. În cadrul opticii se demonstrează că distanța de rezoluție este comparabilă cu lungimea de undă a luminii, care pentru spectrul vizibil variază între $0{,}4$ şi $0{,}8\ \mu m$. Deci sunt imposibil de observat detalii mai mici de $0{,}2\ \mu m$; calculul acestei distanțe de separare se face după formula

$$d = \frac{0{,}61\lambda}{n \cdot \sin\alpha}$$

unde n este indicele de refracție.

În cazul în care se observă două obiecte foarte mici situate la distanță mai mică de $0{,}2\text{-}0{,}8\ \mu m$, pe ecran se va observa o "pată" difuză.

Folosind fascicule electronice, mărirea imaginilor observate este apreciabilă. Acest lucru se datorează faptului că lungimea de undă asociată electronilor ($\lambda = h/mv$) depinde de viteza de accelerare care, la rândul ei, este funcție de tensiunea de accelerare.

În figura 7.13 sunt reprezentate un microscop optic, (7.13*a*), un microscop electronic cu lentile electrice (electrostatice – 7.13*b*) şi unul cu lentile magnetice (7.13*c*); lentilele sunt notate cu L, obiectul cu O, imaginea cu I iar sursa cu S.

adnotații……

8. PROBLEME. MODELE OPERAȚIONALE

1. Să se deducă expresia intensității câmpului electric şi a potențialului electric într-un punct **Error! Objects cannot be created from editing field codes.** situat la distanța **Error! Objects cannot be created from editing field codes.** de o linie infinită încărcată uniform cu sarcină electrică cu densitatea liniară

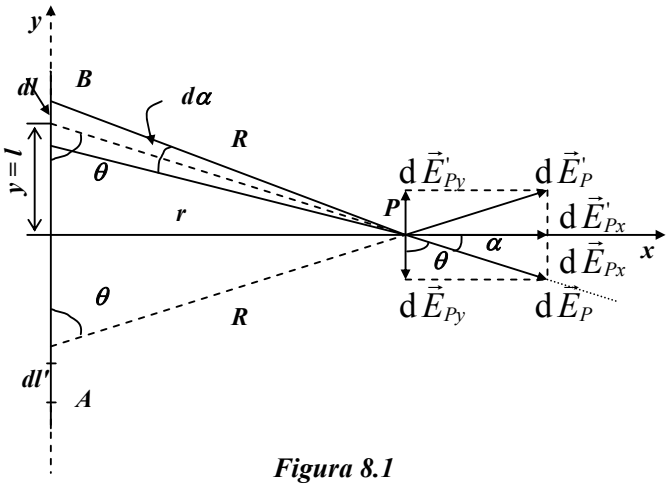


Figura 8.1

Error! Objects cannot be created from editing field codes..

Rezolvare

Varianta I.

Fie un element infinitezimal $\mathrm{d}l$ *al liniei (figura 8.1) având sarcina electrică* $\mathrm{d}q = \lambda \cdot \mathrm{d}l$ *. Câmpul în punctul* P *produs de sarcina* dq *este:*

$$\mathrm{d}E_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{R^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda \cdot \mathrm{d}l}{R^2}$$

Componentele acestui câmp sunt:

$$\mathrm{d}E_{Px} = \mathrm{d}E_P \cos\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda \cdot \mathrm{d}l \cos\alpha}{R^2}$$

$$\mathrm{d}E_{Py} = \mathrm{d}E_P \sin\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda \cdot \mathrm{d}l \sin\alpha}{R^2}$$

Deoarece componentele pe axa Y ale câmpurilor produse în punctul P *de elementele de linie simetrice* $\mathrm{d}l$ *şi* $\mathrm{d}l'$ *sunt egale şi de sensuri contrare, rezultă că în punctul* P *câmpul va fi:*

adnotații ……..

$$E = E_P = \int \mathrm{d}E_{Px} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}l\cdot\cos\alpha}{R^2} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}l\cdot\cos^3\alpha}{r^2} =$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3\alpha}{r^2}\frac{R\cdot\mathrm{d}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3\alpha}{r^2}\frac{r\cdot\mathrm{d}\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow$$

$$E = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos\alpha\cdot\mathrm{d}\alpha = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

Din $\vec{E} = -\nabla V = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\vec{u}$, *rezultă că* $\mathrm{d}V = -E\cdot\mathrm{d}r$

$$\int \mathrm{d}V = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int\frac{\mathrm{d}r}{r} \Rightarrow V = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r + const.$$

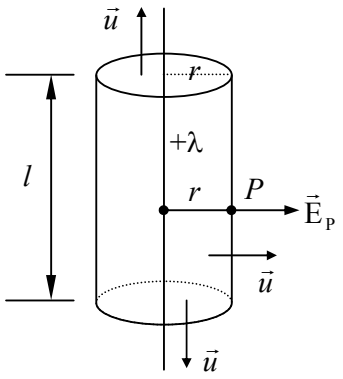


Figura8.2

Varianta II.

Se alege o suprafață gaussiană sub forma unui cilindru având ca axă linia infinită încărcată electric (figura 8.2). Fluxul prin suprafețele circulare fiind nul rezultă că fluxul prin suprafața laterală cilindrică este:

$$\Phi = \int \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \int E\cdot\mathrm{d}S = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda\cdot l}{\varepsilon_0}$$

$$E\cdot 2\pi r l = \frac{\lambda\cdot l}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

Caz particular:

Dacă distribuția liniară de sarcină este finită (AB – vezi figura) atunci

$$\mathrm{d}V = \frac{\lambda\cdot\mathrm{d}l}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\lambda\cdot\mathrm{d}y}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+y^2}}$$

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{y_A}^{y_B}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{r^2+y^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{y_B+\sqrt{y_B^2+r^2}}{y_A+\sqrt{y_A^2+r^2}}$$

2. Care sunt expresiile potențialului electric şi intensității câmpului electric într-un punct P situat pe axa perpendiculară în centrul unei spire

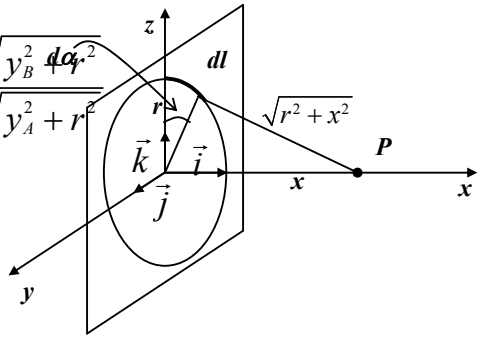


Figura 8.3

circulare de rază r, filiformă şi electrizată uniform cu densitatea liniară de sarcină electrică **Error! Objects cannot be created from editing field codes.**.

Rezolvare

Elementul de arc de cerc dl de pe spiră (figura 8.3) are sarcina electrică

$$\mathrm{d}q = \lambda \cdot \mathrm{d}l = \lambda \cdot r \cdot \mathrm{d}\alpha = \frac{q}{2\pi r} r \cdot \mathrm{d}\alpha = \frac{q \cdot \mathrm{d}\alpha}{2\pi}$$

Potențialul electric în punctul P, la distanța $\sqrt{r^2 + x^2}$ *de sarcină electrică dq este:*

$$\mathrm{d}V = \frac{\lambda \cdot r \cdot \mathrm{d}\alpha}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{r^2 + x^2}}$$

Pentru toată spira avem:

$$V = \frac{\lambda \cdot r}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{r^2 + x^2}} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\alpha = \frac{\lambda \cdot r}{2\varepsilon_0 \sqrt{r^2 + x^2}}$$

Caz particular: în centrul spirei (x=0), $V = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0}$

Intensitatea câmpului electric este:

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}V = -\nabla V = -\nabla\left(\frac{\lambda \cdot r}{2\varepsilon_0 \sqrt{r^2 + x^2}}\right) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\vec{i}\left(\frac{\lambda \cdot r}{2\varepsilon_0 \sqrt{r^2 + x^2}}\right) =$$

$$= -\frac{\lambda \cdot r}{2\varepsilon_0}\vec{i}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + x^2}}\right) = \frac{\lambda r x}{2\varepsilon_0 \left(r^2 + x^2\right)^{3/2}}\vec{i}$$

Caz particular: în centrul spirei ($x = 0$*),* $\vec{E} = 0$

3. În circuitul cu condensatoare din figura 8.4 se cunosc: **Error! Objects cannot be created from editing field codes.** , C1=7μF, C2=4μF, C3=1μF, C4=2μF. Se cere: a) capacitatea echivalentă a celor patru condensatoare; b) sarcinile electrice de pe armăturile condensatoarelor; c) tensiunile la bornele condensatoarelor; d) energiile înmagazinate în condensatoare.

Rezolvare

a)

$$C_{3,4} = \frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4} = \frac{2}{3}\mu\mathrm{F}$$

$$C_{2,3,4} = C_2 + C_{3,4} = \frac{14}{3}\mu\mathrm{F}$$

adnotații ……..

$$C = \frac{C_1 C_{2,3,4}}{C_1 + C_{2,3,4}} = \frac{98}{35}\mu\text{F}$$

b₁) $q_1 = q_{2,3,4} = q = C \cdot U = 7 \cdot 10^{-4}\text{C}$

Din $U_2 = U_{3,4} \Leftrightarrow \frac{q_2}{C_2} = \frac{q_3}{C_{3,4}} \Rightarrow q_2 = 6 \cdot 10^{-4}\text{C}$,

$q_1 = q_2 + q_3 \quad q_3 = q_4 = 10^{-4}\text{C}$

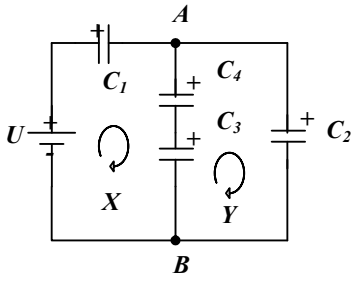


Figura 8.4

b₂) Apelând la teoremele lui Kirchhoff din electrostatică:

$$\sum_{i=1}^{n} q_i = 0 \text{ şi } \sum_{i=1}^{p} \frac{q_i}{C_i} = \sum_{j=1}^{m} U_j$$

(n – numărul de sarcini electrice dintr-un nod electrostatic, p – numărul de condensatoare din conturul închis, m – numărul surselor electrice de tensiune din acel contur)

Pentru nodul A: $-q_1 + q_2 + q_3 = 0$

Pentru conturul X: $\frac{q_1}{C_1} + \frac{q_4}{C_4} + \frac{q_3}{C_3} = U$

Pentru conturul Y: $\frac{q_2}{C_2} - \frac{q_3}{C_3} - \frac{q_4}{C_4} = 0$

din cele trei relații de mai sus şi din $q_3 = q_4$ *rezultă* q_1, q_2, q_3, q_4.

c) $U_1 = \frac{q_1}{C_1} = 100\text{V}$, $U_2 = \frac{q_2}{C_2} = 150\text{V}$, $U_3 = \frac{q_3}{C_3} = 100\text{V}$,

$U_4 = \frac{q_4}{C_4} = 50\text{V}$ *sau*

$U_3 = \frac{q_3}{C_3} = 100\text{V}$, $U_4 = \frac{q_4}{C_4} = 50\text{V}$, $U_2 = U_3 + U_4 = 150\text{V}$.

adnotații……

d) $W_1 = \frac{1}{2} q_1 U_1 = 7 \cdot 10^{-2}\,\text{J}$, $W_2 = \frac{1}{2} q_2 U_2 = \frac{1}{2} C_2 U_2^2 = 9 \cdot 10^{-2}\,\text{J}$,

$$W_1 = \frac{1}{2} q_3 U_3 = 10^{-2}\,\text{J},$$

$$W_4 = \frac{1}{2} q_4 U_4 = 0{,}5 \cdot 10^{-2}\,\text{J}.$$

4. Condensatoarele se pot grupa însă în stea şi în triunghi (figura 1.22). Care sunt capacitățile echivalente dintre bornele 1, 2, 3 luate două câte două la transfigurarea stea-triunghi şi triunghi-stea?

Rezolvare

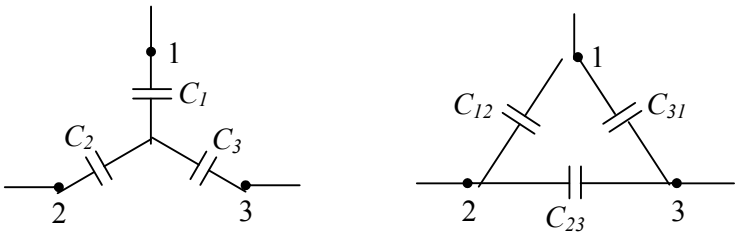


Figura 8.5

Capacitățile echivalente între borne sunt:

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{Bornele 1-2} & \dfrac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = C_{12} + \dfrac{C_{31} C_{23}}{C_{31} + C_{23}} \\ \textit{Bornele 2-3} & \dfrac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} = C_{23} + \dfrac{C_{12} C_{31}}{C_{12} + C_{31}} \\ \textit{Bornele 3-1} & \dfrac{C_1 C_3}{C_1 + C_3} = C_{31} + \dfrac{C_{12} C_{23}}{C_{12} + C_{23}} \end{array}\right\}$$

Rezolvând sistemul de mai sus se găseşte pentru transfigurarea stea-triunghi, expresiile:

$$C_{12} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2 + C_3},\ C_{23} = \frac{C_2 C_3}{C_1 + C_2 + C_3},\ C_{31} = \frac{C_3 C_1}{C_1 + C_2 + C_3}$$

Rezolvând acelaşi sistem se găseşte pentru transfigurarea triunghi-stea, expresiile:

$$C_1 = C_{12} + C_{31} + \frac{C_{12} C_{31}}{C_{23}}$$

adnotații ……..

$$C_2 = C_{23} + C_{12} + \frac{C_{23}C_{12}}{C_{31}}$$

$$C_3 = C_{31} + C_{23} + \frac{C_{31}C_{23}}{C_{12}}$$

5. Să se calculeze intensitatea câmpului electric al unui plan infinit încărcat uniform cu densitatea superficială de sarcină electrică +σ.

Considerăm o suprafață gaussiană de formă cilindrică perpendiculară pe planul încărcat electric (vezi figura8.5). Fluxul prin suprafața laterală a cilindrului este nul.

Rezolvare

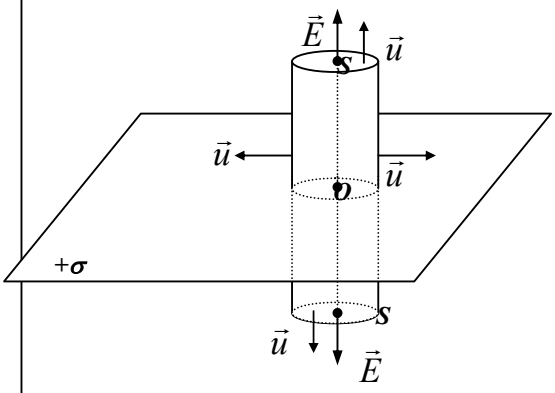


Figura 8.6

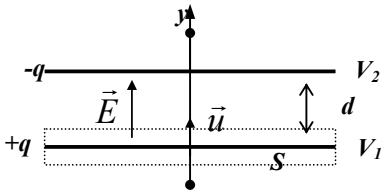


Figura 8.7

$$\Phi_{lat} = \int_{S_{lat}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_{S_{lat}} E\cdot \mathrm{d}S\cdot\cos\left(\vec{E},\vec{u}\right) = \int_{S_{lat}} E\cdot \mathrm{d}S\cdot\cos 90 = 0$$

Fluxul total prin bazele cilindrului este:

$$\Phi = \int_{S_{sup}} E\cdot \mathrm{d}S + \int_{S_{inf}} E\cdot \mathrm{d}S = E\cdot S + E\cdot S = 2ES = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma\cdot S}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Dacă avem două plane încărcate cu densitate superficială +σ, respectiv –σ (condensator plan) atunci câmpurile ambelor plane sunt orientate de la planul încărcat cu +σ spre planul încărcat cu –σ. Câmpul rezultant va avea intensitatea

$$E_C = E + E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

6. Un condensator plan are suprafața unei armături S=50cm2 şi distanța între armături d=0,5cm. Tensiunea aplicată este U=900V. Între armături se introduce o placă de sticlă **Error! Objects cannot be created from editing field codes.** de 3mm grosime, restul dielectricului fiind aer. Să se calculeze distribuția

adnotații……

tensiunii între cei doi dielectrici (sticlă şi aer) şi energia localizată în fiecare dielectric.

Rezolvare

Tensiunea pentru dielectricul (1) este E_1d_1 iar pentru dielectricul (2) este E_2d_2. Tensiunea totală va fi:

$$U = E_1 \mathrm{d}_1 + E_2 \mathrm{d}_2 = E_1 \mathrm{d}_1 + \frac{E_1}{\varepsilon_2}\mathrm{d}_2 = E_1\left(\mathrm{d}_1 + \frac{\mathrm{d}_2}{\varepsilon_2}\right)$$

unde $\varepsilon_\varepsilon = \varepsilon_r = 6$ *iar* $E_1 = \dfrac{U}{\mathrm{d}_1 + \dfrac{\mathrm{d}_2}{\varepsilon_2}}$. *Rezultă:*

$$U_1 = E_1 \mathrm{d}_1 = U\frac{\mathrm{d}_1}{\mathrm{d}_1 + \dfrac{\mathrm{d}_2}{\varepsilon_2}} = 300\frac{0,2}{0,2+0,05} = \frac{60}{0,25} = 240\mathrm{V}$$

$$U_2 = 300 - 240 = 60\mathrm{V}$$

Energia localizată în fiecare dielectric se poate calcula considerând fiecare dielectric ca un condensator plan de capacitate:

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_1 S}{\mathrm{d}_1};\ C_2 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_2 S}{\mathrm{d}_2}$$

Astfel:

$$W_1 = \frac{1}{2}C_1U_1^2 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0\varepsilon_1 S}{\mathrm{d}_1}U_1^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\cdot 9\cdot 10^9}\cdot 1\cdot\frac{5\cdot 10^{-3}}{2\cdot 10^{-3}}\cdot 240^2 = 6,35\cdot 10^{-7}\mathrm{J}$$

$$W_2 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0\varepsilon_2 S}{\mathrm{d}_2}U_2^2 = \frac{1}{2}\frac{6}{4\pi\cdot 9\cdot 10^9}\cdot\frac{5\cdot 10^{-3}}{3\cdot 10^{-3}}\cdot 60^2 = 1,6\cdot 10^{-7}\mathrm{J}.$$

7. Să se deducă expresiile câmpului electric şi ale capacității electrice pentru condensatoarele plan, cilindric şi sferic în funcție de sarcina electrică de pe o armătură şi de mărimile fizice constructive.

Rezolvare

Condensatorul plan (figura 8.6)
Varianta I.

adnotații ……..

$$Din\ \vec{E} = -\operatorname{grad} V = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y}\vec{u} \Rightarrow \mathrm{d}V = -E \cdot \mathrm{d}y$$

$$\int_{V_1}^{V_2} \mathrm{d}V = -E\int_0^{\mathrm{d}} \mathrm{d}y \Rightarrow E = \frac{V_1 - V_2}{\mathrm{d}} = \frac{U}{\mathrm{d}}.$$

Varianta II.

Alegând o suprafață gaussiană de forma unui paralelipiped ce conține armătura cu sarcina +q (vezi figura 1.17), se poate scrie:

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_S E \cdot \mathrm{d}S = E \cdot S = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q}{\varepsilon_0 S} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Capacitatea electrică este

$$C = \frac{q}{U} = \frac{\varepsilon_0 SE}{U} = \frac{\varepsilon_0 SE}{E \cdot \mathrm{d}} = \frac{\varepsilon_0 S}{\mathrm{d}}$$

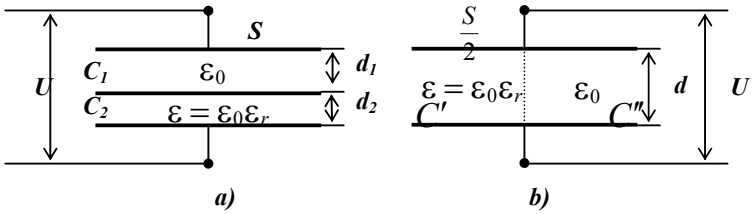


Figura 8.8

Condensatorul plan umplut parțial cu dielectric (figura 8.7)

În cazul reprezentat în figura 8.7a condensatorul este format dintr-un sistem de două condensatoare în serie având fiecare capacitățile:

$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{\mathrm{d}_1}$ *şi* $C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{\mathrm{d}_2}$ *şi capacitatea echivalentă* $\frac{1}{C_s} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow C_s = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$.

În cazul din figura 1.18b condensatorul este format din două condensatoare legate în paralel având fiecare capacitățile $C' = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r (S/2)}{\mathrm{d}}$ *şi* $C'' = \frac{\varepsilon_0 (S/2)}{\mathrm{d}}$ *şi capacitatea echivalentă* $C_p = C' + C''$.

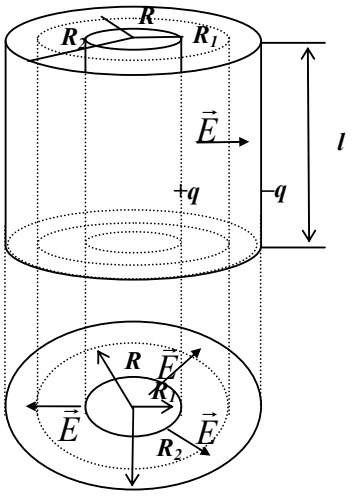


Figura 8.9

Condensatorul cilindric (figura 8.8)

Armăturile condensatorului cilindric au razele R1 şi R2 (R2>R1), lungimea generatoarei l şi sarcina unei armături q. Alegând suprafața gaussiană sub forma unui cilindru coaxial cu armăturile şi având raza R (R1<R<R2), datorită

adnotații……

simetriei câmpului va avea aceeaşi intensitate pe toată suprafaţa gaussiană. Fluxurile prin suprafeţele circulare sunt nule, iar prin suprafaţa laterală este:

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = E \cdot 2\pi Rl = \frac{q}{\varepsilon}$$

$$E = \frac{q}{2\pi\varepsilon Rl}$$

Tensiunea între cele două armături este:

$$U = \int_{V_1}^{V_2} \mathrm{d}V = \int_{R_1}^{R_2} E \cdot \mathrm{d}R = \frac{q}{2\pi\varepsilon l}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mathrm{d}R}{R} = \frac{q}{2\pi\varepsilon l}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

Capacitatea electrică este:

$$C = \frac{q}{U} = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\dfrac{R_2}{R_1}}$$

Condensatorul sferic

Procedând analog ca în cazul condensatorului cilindric, se găseşte:

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = E \cdot 4\pi R^2 = \frac{q}{\varepsilon} \Rightarrow E = \frac{q}{4\pi\varepsilon R^2},$$ *unde R este raza unei sfere concentrice cu armăturile având razele R1 şi R2 (R1<R<R2).*

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E \cdot \mathrm{d}R = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mathrm{d}R}{R^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$$

Capacitatea electrică este:

$$C = \frac{q}{U} = 4\pi\varepsilon\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

8. Să se calculeze potențialul şi câmpul unui dipol electric (ansamblu de două sarcini electrice egale şi de semne contrare situate la distanța l) într-un punct P situat la distanțele r1 şi r2 de cele două sarcini.

Rezolvare

Pentru rezolvare se vor utiliza coordonatele polare (figura 8.9)

$$\vec{E}_P = \vec{E}_r + \vec{E}_\theta,\ E_P = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2}\ \text{cu}$$

$$\vec{E}_r = -\frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r,\ \vec{E}_\theta = -\frac{\partial V}{\partial \tau}\vec{u}_\theta = -\frac{\partial V}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial \tau}\vec{u}_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u}_\theta,$$

unde

$$V = V_{P(+q)} + V_{P(-q)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_1} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2}$$

adnotații ……..

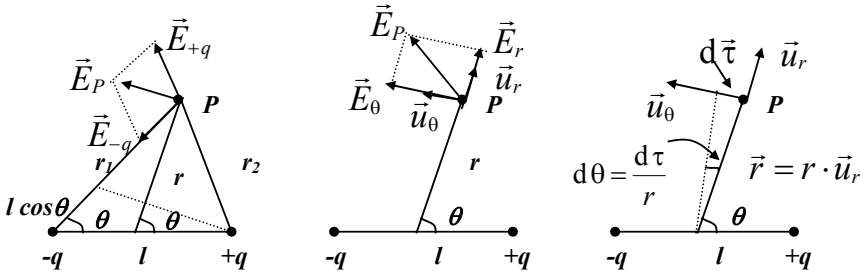


Figura 8.10

Dacă punctul P este situat la o distanță suficient de mare de centrul dipolului (r>>l) se poate scrie:

$r_1 - r_2 \approx l\cos\theta$ *şi* $r_1 r_2 \approx r^2$ *. În acest fel, pentru potențialul electric în*

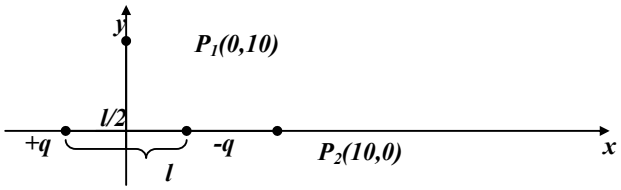


Figura 8.11

punctul P se găseşte

$$V = \frac{ql\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{p\cdot r\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$$

În felul acesta, pentru componentele câmpului, se găseşte:

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p\cos\theta}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2ql\cos\theta}{r^3}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\sin\theta}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ql\sin\theta}{r^3}$$

$$E_P = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sqrt{4\cos^2\theta + \sin^2\theta} =$$

$$= \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sqrt{3\cos^2\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta} =$$

$$= \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sqrt{3\cos^2\theta + 1}$$

$$\vec{E}_P = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\vec{u}_r + \sin\theta\vec{u}_\theta\right)$$

Caz particular

adnotații……

Să se calculeze potențialele şi câmpurile dipolului electric având $q = 10^{-6}\text{C}$ *şi* $l = 10^{-5}\text{m}$ *în punctele P1(0,10cm) şi P2(10cm,0) (figura 8.10).*

În punctul P1, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $r_1 = r_2 = r = 10\text{cm}$ *şi deci:*

$$V_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2} \approx \frac{ql\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = 0\text{V}$$

În punctul P2, $\theta = \pi$ *şi deci:*

$$V_2 = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ql}{r^2} = -9\text{V}\,.$$

Pentru câmp, în punctul P1 se găseşte:

$$E_{r_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2ql\cos\theta}{r^3} = 0\,,\; E_{\theta_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ql\sin\theta}{r^3} = 90\frac{\text{V}}{\text{m}}\,,$$

iar în punctul P2, se găseşte:

$$E_{r_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2ql\cos\theta}{r^3} = -180\frac{V}{m}\,,\; E_{\theta_2} = 0\,.$$

9. Între armăturile unui condensator plan, menținute la tensiunea U=100V şi la distanța de 0,2mm se introduce o lamă de mică **Error! Objects cannot be created from editing field codes.** de aceeaşi grosime. Să se calculeze densitatea sarcinii electrice de polarizare pe fețele lamei de mică **Error! Objects cannot be created from editing field codes.** şi densitatea sarcinii electrice de pe armături **Error! Objects cannot be created from editing field codes.**.

Rezolvare

$$E = \frac{U}{\text{d}} = \frac{100}{2\cdot 10^{-4}} = 5\cdot 10^5\,\text{V/m}$$

Densitatea de sarcină electrică de pe armături, înainte de introducerea lamei, este $\sigma_0 = \varepsilon_0 E$.

$$\sigma_P = \sigma_0\left(\varepsilon_r - 1\right) = \varepsilon_0 E\left(\varepsilon_r - 1\right) = \frac{5\cdot 10^5}{4\pi\cdot 9\cdot 10^9}\cdot 4{,}7 = 2{,}38\cdot 10^{-5}\,\text{C/m}^2$$

Scriind că intensitatea câmpului electric $E = \frac{U}{\text{d}}$ *este aceeaşi între armăturile cu dielectric între ele, ca şi în cazul când nu există dielectricul (deoarece U rămâne constant), rezultă:*

$$\sigma_a - \sigma_P = \sigma_0\,;$$

adnotații ……..

$$\sigma_a = \sigma_P + \sigma_0 = \sigma_0(\varepsilon_r - 1) + \sigma_0 = \varepsilon_r\sigma_0 = \varepsilon_0\varepsilon_r E = \frac{5,7\cdot 5\cdot 10^5}{4\pi\cdot 9\cdot 10^9} = 2,9\cdot 10^{-5}\,\mathrm{C/m^2}$$

adică, prin introducerea dielectricului, sarcina de pe armături creşte, pentru aceeaşi tensiune U.

10. Să se calculeze presiunea ce ia naştere într-o placă de sticlă **Error! Objects cannot be created from editing field codes.** introdusă intre armăturile unui condensator plan, aflat sub tensiunea U=500V. Distanța dintre armături este 2mm.

Rezolvare

$$E = \frac{U}{\mathrm{d}} = \frac{5\cdot 10^2}{2\cdot 10^{-3}} = 2,5\cdot 10^5\,\mathrm{V/m}$$

Sarcinile de polarizare de pe cele două fețe ale plăcii sunt: $+\sigma_P S$ *şi* $-\sigma_P S$ *(figura 8.11). Asupra acestor sarcini acționează câmpul electric E, care tinde să le îndepărteze şi câmpul Ed din interiorul dielectricului, care tinde să le apropie. Forța rezultantă, datorită celor două câmpuri, va fi:*

$$F = \sigma_P SE - \sigma_P SE_{\mathrm{d}} = \sigma_P S(E - E_{\mathrm{d}}) =$$

$$= \sigma_P S\left(E - \frac{E}{\varepsilon_r}\right) = \sigma_P SE\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) = \sigma_P SE\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}$$

Dar,

$$\sigma_P = \varepsilon_0 E(\varepsilon_r - 1)$$

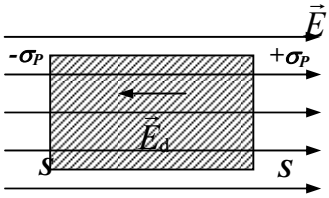


Figura 8.12

şi atunci:

$$F = \varepsilon_0 SE^2\frac{(\varepsilon_r - 1)^2}{\varepsilon_r} = \frac{6,25\cdot 10^{10}}{4\pi\cdot 9\cdot 10^9}\cdot\frac{25}{6} = 2,3\,\mathrm{N/m^2}$$

11. Un condensator plan, cu aer, are armăturile dreptunghiulare de lungime l=10cm şi lățime b=5cm. Distanța între armături este d=0,5cm. Condensatorul este încărcat sub tensiunea U0=200V, după care se întrerupe legătura cu sursa

adnotații……

de tensiune şi el rămâne încărcat sub această tensiune. În aceste condiții se cere:

a) Care este densitatea de sarcină electrică, **Error! Objects cannot be created from editing field codes.**, de pe armături?

b) Care este distribuția densității de sarcină electrică pe armături atunci când între armături se introduce o placă de dielectric de aceeaşi grosime d ca şi distanța dintre armături, pe o porțiune x din lungimea armăturilor **Error! Objects cannot be created from editing field codes.**?

c) Cum variază, în funcție de x, tensiunea între armăturile condensatorului prin introducerea dielectricului?

d) Lucrul mecanic efectuat de forțele electrice la introducerea dielectricului.

e) Forța dezvoltată de câmpul electric pentru pătrunderea plăcii de dielectric între armături.

Rezolvare

$$\text{a) } U_0 = \frac{q}{C} = \frac{\sigma_0 S}{\varepsilon_0 S}\mathrm{d} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\mathrm{d};$$

$$\sigma_0 = \frac{U_0\varepsilon_0}{\mathrm{d}} = \frac{200}{4\pi\cdot 9\cdot 10^9\cdot 5\cdot 10^{-3}} = 3{,}55\cdot 10^{-7}\,\mathrm{C/m^2}$$

b) Legătura cu sursa de tensiune fiind întreruptă rezultă că, prin introducerea plăcii de dielectric, cantitatea totală de electricitate de pe armături nu se modifică ci are loc numai o redistribuire a ei.

Astfel, dacă σ_1 *este densitatea electrică pe porțiunea de armătură unde dielectricul este aerul iar* σ_x *este densitatea de electricitate pe porțiunea de armătură unde s-a introdus placa de dielectric, rezultă:*

$$\sigma_0 S = \sigma_1 S_1 + \sigma_x S_x = \sigma_1 S_1 + \varepsilon_r \sigma_1 S_x = \sigma_1\left(S_1 + \varepsilon_r S_x\right)$$

adică,

$$\sigma_1 = \sigma_0\frac{S}{S_1 + \varepsilon_r S_x} = \sigma_0\frac{l}{(l-x)+\varepsilon_r x} = \frac{\varepsilon_0 U_0}{\mathrm{d}}\frac{l}{(l-x)+\varepsilon_r x} =$$

$$= \frac{3{,}55\cdot 10^{-8}}{(0{,}1-x)+4x} = \frac{3{,}55\cdot 10^{-8}}{0{,}1+3x}$$

$$\sigma_x = \varepsilon_r\sigma_1 = 4\sigma_1 = \frac{14{,}2\cdot 10^{-8}}{0{,}1+3x}$$

✍ adnotații ……

Se observă că, prin introducerea plăcii de dielectric σ_1 *variază de la* σ_0 *(pentru x=0) până la* $\frac{\sigma_0}{\varepsilon_r}=\frac{\sigma_0}{4}$ *pentru (x=l), adică scade cel mult de* ε_r *ori. În ceea ce priveşte* σ_x *acesta deasemeni variază de la* $\varepsilon_0\sigma_0=4\sigma_0$ *(pentru x=0) până la* σ_0 *pentru (x=l).*

c) Tensiunea U rămâne aceeaşi, atât pentru porţiunea cu dielectricul placă cât şi pentru aceea cu aer. Deci:

$$U_x=E_1\,\mathrm{d}=\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\mathrm{d}\cdot\frac{l}{(l-x)+\varepsilon_r\cdot x}=U_0\frac{l}{(l-x)+\varepsilon_r\cdot x}=\frac{20}{(0{,}1-x)+4x}=\frac{20}{0{,}1+3x}$$

Se vede că, prin introducerea plăcii de dielectric, tensiunea Ux scade de la U0=200V (pentru x=0) până la $U=\frac{U_0}{\varepsilon_r}=\frac{U_0}{4}=50\mathrm{V}$ *(pentru x=l).*

d) Lucrul mecanic al forţelor electrice este egal cu variaţia energiei potenţiale a condensatorului. Deoarece tensiunea scade iar sarcina totală a unei armături rămâne constantă, însemnează că energia condensatorului scade prin introducerea plăcii. Deoarece energia unui condensator are expresia: $W=\frac{1}{2}QU$ *rezultă că variaţia de energie este:*

$$\Delta W_x=W_x-W_0=\frac{1}{2}Q(U_x-U_0)=\frac{1}{2}\sigma_0 S(U_x-U_0)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 3{,}55\cdot 10^{-7}\cdot 5\cdot 10^{-3}\left(\frac{20}{0{,}1+3x}-200\right)=$$

$$=1{,}775\cdot 10^{-8}\left(\frac{1}{0{,}1+3x}-10\right)\mathrm{J}$$

Pentru x=l se obţine:

$$L=\Delta W=1{,}775\cdot 10^{-8}(2{,}5-10)=-1{,}33\cdot 10^{-7}\,\mathrm{J}$$

e) Deoarece energia condensatorului scade prin introducerea plăcii, rezultă că forţa exercitată de câmpul electric asupra plăcii de dielectric este o forţă de atracţie care tinde să introducă placa între armături. Deci, condensatorul „suge" dielectricul. Conform relaţiei dintre forţă şi energia potenţială, rezultă valoarea forţei:

$$F=-\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x}\ \text{sau}\ |F|=\left|\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x}\right|=\left|\frac{\mathrm{d}(QU_x/2)}{\mathrm{d}x}\right|$$

$$F=\frac{1}{2}\cdot Q\cdot\frac{\mathrm{d}U_x}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{2}\sigma_0 S\frac{60}{(0{,}1+3x)^2}=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot 3{,}55\cdot 10^{-7}\cdot 5\cdot 10^{-3}\cdot\frac{60}{(0{,}1+3x)^2}=\frac{5{,}325\cdot 10^{-8}}{(0{,}1+3x)^2}\,\mathrm{N}$$

Forța are valoarea maximă când x=0 şi minimă când x=l.

$$F_{\max}=5{,}325\cdot 10^{-6}\,\mathrm{N}$$

$$F_{\min}=3{,}325\cdot 10^{-7}\,\mathrm{N}$$

$$F_{\min}=\frac{1}{16}F_{\max}$$

Observație:

Dacă tensiunea dintre armăturile condensatorului ar fi fost menținută constantă, păstrând legătura cu sursa de tensiune, atunci prin introducerea dielectricului capacitatea lui crescând, energia condensatorului $W=\frac{1}{2}CU^2$ *creşte. În acest caz variația de energie este pozitivă şi forța care se naşte este o forță de respingere, deci condensatorul tinde să „expulzeze" dielectricul.*

12. Se dă circuitul din figura de mai jos în care se cunosc: E =12V, r=1Ω, R1=5Ω, R2=3Ω, R3=4Ω, iar R este rezistența unui voltametru cu sare de cupru; echivalentul electrochimic al cuprului este **Error! Objects cannot be created from editing field codes.**. Știind că la catodul voltametrului se depune, în **Error! Objects cannot be created from editing field codes.**, o cantitate **Error! Objects cannot be created from editing field codes.** de cupru, să se calculeze:

a) intensitățile curenților prin circuit;

b) rezistența R a voltametrului;

c) puterea rezistorului R3;

d) energia debitată de baterie pe circuitul exterior în timp de o oră;

e) randamentul bateriei;

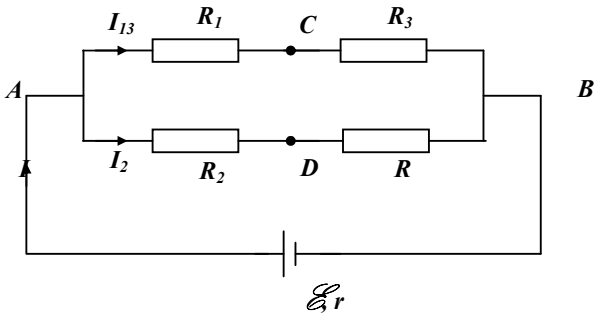


Figura 8.13

adnotații……

✍ adnotații ……

f) dacă între punctele C şi D se conectează un galvanometru, ce valoare trebuie să aibă o rezistență R4, care, conectată în locul voltametrului, face ca între punctele C şi D să nu circule curent electric;

g) dacă galvanometrul conectat între C şi D are rezistența interioară **Error! Objects cannot be created from editing field codes.** şi suportă un curent maxim **Error! Objects cannot be created from editing field codes.**, ce valoare trebuie să aibă rezistența unui şunt pentru a-l face să măsoare curentul maxim **Error! Objects cannot be created from editing field codes.** ?curentul maxim **Error! Objects cannot be created from editing field codes.** ?

Rezolvare

a) Din $m_{Cu} = kI_2 t \Rightarrow I_2 = \dfrac{m_{Cu}}{kt}$, $I_2 = 2\text{A}$

$$\left.\begin{aligned} I &= I_{13} + I_2 \\ I &= \frac{E}{\dfrac{(R_1+R_3)(R_2+R)}{R_1+R_3+R_2+R} + r} \end{aligned}\right\} \Rightarrow I = 3\text{A}, \quad I_{13} = 1\text{A}$$

sau

$$\left.\begin{aligned} I &= I_{13} + I_2 \\ E &= rI + (R_1+R_3)I_{13} \end{aligned}\right\} \Rightarrow I = 3\text{A}, \quad I_{13} = 1\text{A}$$

b) $(R_1+R_3)I_{13} = (R_2+R)I_2 \Rightarrow R = 1{,}5\Omega$

c) $P_3 = R_3 I_{13}^2$, $P_3 = 4\text{W}$

d) $$W = \frac{(R_1+R_3)(R_2+R)}{R_1+R_3+R_2+R} I^2 t$$

sau $W = (E - rI)It$

$\Rightarrow W = 97{,}2\text{kJ}$

e) $$\eta = \frac{P_u}{P_c} = \frac{U}{E} = \frac{E-rI}{E}, \ \eta = 0{,}75$$

f) $$I_{CD} = 0 \Rightarrow \left.\begin{aligned} R_1 I_{13} &= R_2 I_2 \\ R_3 I_{13} &= R' I_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow R_1 R' = R_3 R_2 \Rightarrow R' = 2{,}4\Omega$$

g) $$R_S = \frac{R_G}{\dfrac{I_{G_{\max}}}{I_G} - 1}, \ R_S = 11{,}01\Omega.$$

adnotații……

13. Să se calculeze intensitatea curentului electric de conducție ce trece prin dielectricul imperfect al unui condensator:

a) plan circular;

b) cilindric.

c) Se cunosc: conductanța σ a dielectricului dintre armături, tensiunea U dintre armături şi mărimile fizice constructive ale condensatoarelor; d – distanța dintre armături, r – raza armăturilor plane circulare, razele r1 şi r2 ale armăturilor cilindrice, l – lungimea generatoarei armăturilor cilindrice.

Rezolvare

a) $$i = \int_S \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = J \cdot \pi r^2 = \sigma E \cdot \pi r^2 = \sigma \frac{U}{\mathrm{d}} \pi r^2$$

b) $$i = \int_{Slat.} \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = J \cdot 2\pi r l = \sigma E \cdot 2\pi r l$$

$$U = \int_{r_1}^{r_2} E \cdot \mathrm{d}r = \frac{i}{\sigma \cdot 2\pi l} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{i}{\sigma \cdot 2\pi l} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

$$\Rightarrow i = \frac{2\pi\sigma l U}{\ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

14. Se dă circuitul din figura 8.13 în care se cunosc: E1=90V, E2=100V, R1=30Ω, R2=4Ω, R3=6,25Ω, R4=12,5Ω, R5=2,5Ω.

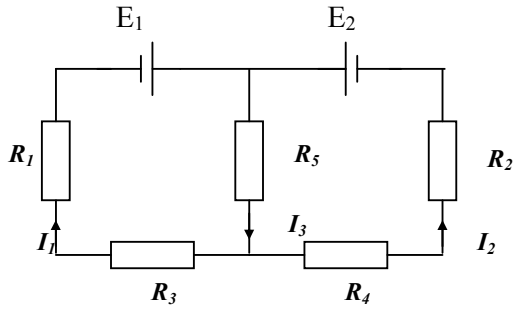


Figura 8.14

Rezolvare

Aplicând teoremele lui Kirchhoff se obține sistemul:

$$E_1=R_5I_3+(R_3+R_1)I_1$$
$$E_2=R_5I_3+(R_4+R_2)I_2$$
$$I_1+I_2=I_3$$

Rezolvând sistemul se găseşte: I_1=2A, I_2=5A, I_3=7A.

15. Se consideră o spiră conductoare inelară, alimentată de la o sursă cu t.e.m.**Error! Objects cannot be created from editing field codes.**. Cunoscând mărimile **Error! Objects cannot be created from editing field codes.**, r1,r2,

adnotații ……..

y şi rezistivitatea ρ a materialului din care este confecționată spira, să se calculeze intensitatea curentului electric ce străbate spira.

Rezolvare

Fie un element de spiră cu raza r, secțiunea $\mathrm{d}S = y \cdot \mathrm{d}r$ *şi lungimea* $2\pi r$ *. Conductanța acesteia este*

$$\mathrm{d}G = \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}S}{2\pi r} = \frac{1}{\rho}\frac{y \cdot \mathrm{d}r}{2\pi r}.$$

Integrând, se obține conductanța spirei

$$G = \frac{y}{2\pi\rho}\int_{r_1}^{r_2}\frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{y}{2\pi\rho}\ln\frac{r_2}{r_1}.$$

Intensitatea curentului electric prin spiră este

$$I = \frac{E}{R} = E \cdot G = \frac{E \cdot y}{2\pi\rho}\ln\frac{r_2}{r_1}.$$

16. Un circuit electric are schema din figura 8.14. Circuitul este alimentat de 6 elemente legate în serie, fiecare element având t.e.m. E =3,6V şi rezistența interioară r=0,1Ω. Rezistorul R are rezistența R=1Ω, iar consumatoarele B1 şi B2 sunt caracterizate prin rezistența R1=6Ω, respectiv puterea P2=48W şi rezistența R2=3Ω. Să se calculeze:

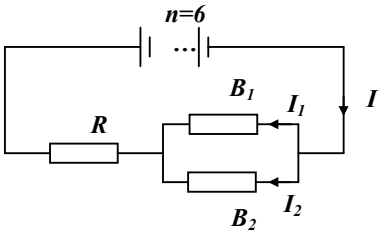


Figura 8.15

a) intensitățile curenților prin becuri;

b) tensiunea U la bornele bateriei şi tensiunea Ub la bornele becurilor;

c) energia termică degajată în becuri în t=5 minute.

Rezolvare

a) $$\text{Din}\ \left.\begin{matrix} P_2 = R_2 I_2^2 \\ R_1 I_1 = R_2 I_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow I_1 = \frac{1}{R_1}\sqrt{P_2 R_2} \Rightarrow \begin{matrix} I_1 = 2\mathrm{A} \\ I_2 = 4\mathrm{A} \end{matrix};$$

b) $$6E = 6r(I_1 + I_2) + U \Rightarrow U = 18\mathrm{V};$$

adnotații……

c) $W = (P_1 + P_2)t = (U_b I_1 + P_2)t \Rightarrow W = 21{,}6 \text{ kJ}$.

17. Se dă circuitul din figura 8.15 în care se cunosc: E1=10V, E2=20V, R1=10Ω, R2=20Ω, R3=5Ω, R4=40Ω, R5=50Ω, C1=10μF şi C2=20μF. Să se calculeze:

a) intensitățile curenților prin circuit;

b) sarcinile electrice de pe armăturile condensatoarelor C1 şi C2.

Rezolvare

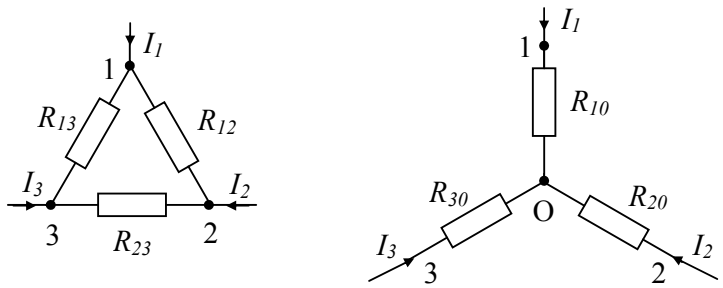
$$\left.\begin{aligned} & I_1 + I_3 = I_2 \\ a)\; & \mathsf{E}_1 = \left(R_4 + R_1\right) I_1 - R_3 I_3 \\ & \mathsf{E}_2 = \left(R_2 + R_5\right) I_2 + R_3 I_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow I_1 = 0{,}24\text{A}$, $I_2 = 0{,}68\text{A}$, $I_3 = 0{,}44\text{A}$;

b) $q_1 = C_1 \cdot U_{C_1} = C_1 \cdot R_4 I_1$, $q_1 \cong 9{,}6 \cdot 10^{-5}\text{C}$

$q_2 = C_2 \cdot R_5 I_2$, $q_2 \cong 170 \cdot 10^{-5}\text{C}$.

18. Să se scrie rezistențele echivalente între borne la trecerea (transfigurarea) de la legarea în triunghi la legarea în stea şi invers (figura 2.12).



a) Triunghi b) Stea

Figura 8.16

Rezolvare

Pentru ca în urma trecerii de la legarea în triunghi la cea în stea şi invers în circuit trebuie să nu se producă modificări, adică potențialele punctelor 1, 2, şi 3 trebuie să rămână aceleaşi, intensitățile curenților care trec prin aceste puncte trebuie să rămână aceleaşi şi deci, şi rezistențele echivalente dintre două puncte trebuie să fie egale, adică:

adnotații ……..

$$R_{10}+R_{20}=\frac{R_{12}\left(R_{13}+R_{23}\right)}{R_{12}+R_{13}+R_{23}}$$
$$R_{20}+R_{30}=\frac{R_{23}\left(R_{12}+R_{13}\right)}{R_{23}+R_{12}+R_{13}}$$
$$R_{10}+R_{30}=\frac{R_{13}\left(R_{12}+R_{23}\right)}{R_{13}+R_{12}+R_{23}}$$

Rezolvând sistemul de mai sus, pentru transfigurarea din triunghi în stea, se găseşte:

$$R_{10}=\frac{R_{12}R_{13}}{R_{12}+R_{23}+R_{13}}$$
$$R_{20}=\frac{R_{12}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}$$
$$R_{30}=\frac{R_{13}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{13}}$$

Rezolvând acelaşi sistem, pentru transfigurarea din stea în triunghi, se găseşte:

$$R_{12}=R_{10}+R_{20}+\frac{R_{10}R_{20}}{R_{30}}$$
$$R_{23}=R_{20}+R_{30}+\frac{R_{20}R_{30}}{R_{10}}$$

19. La capetele unui conductor cu lungimea l=1m se aplică o diferență de potențial U=1V. Cunoscând numărul electronilor din unitatea de volum din conductor, **Error! Objects cannot be created from editing field codes.**, să se calculeze: a) intensitatea câmpului electric din conductor; b) rezistența electrică a conductorului şi densitatea de curent dacă conductorul este parcurs de un curent I=2A; c) viteza medie a mişcării ordonate a electronilor din conductor. Se cunoaşte rezistivitatea conductorului **Error! Objects cannot be created from editing field codes.** şi sarcina electronului **Error! Objects cannot be created from editing field codes.**.

Rezolvare

a) $E=\frac{U}{l},\ E=1\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}};$

adnotații……

b) $R=\frac{U}{I}$, *R=0,5Ω;* $j=\frac{I}{S}=\frac{1}{S}\frac{U}{\rho\frac{l}{S}}=\frac{U}{\rho l}$, $j=2,3\cdot10^{6}\frac{\text{A}}{\text{m}^2}$;

c) $v=\frac{j}{ne}$, $v=8,98\cdot10^{-4}\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

$$R_{13}=R_{10}+R_{30}+\frac{R_{10}R_{30}}{R_{20}}$$

20. 2.2.10. Să se deducă expresiile pentru şunt şi rezistența adițională.

Rezolvare

Pentru şuntul unui ampermetru (figura 2.17) aplicând teoremele lui Kirchhoff, se găseşte:

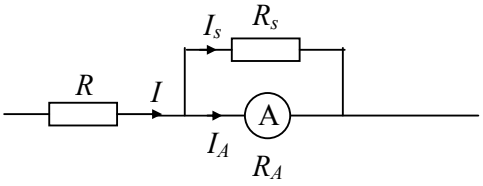


Figura 8.17

$$\left.\begin{aligned}I=I_A+I_S\\R_AI_A=R_SI_S\end{aligned}\right\}\Rightarrow R_S=\frac{R_A}{\frac{I}{I_A}-1}=\frac{R_A}{n-1}$$

Pentru rezistența adițională (figura 2.18) din teoremele lui Kirchhoff, se găseşte:

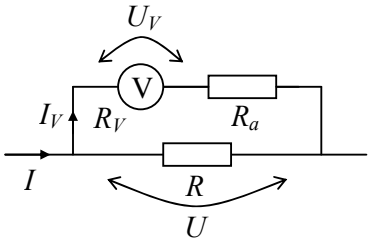


Figura 8.18

$$\left.\begin{aligned}U_V+R_aI_V=U\\R_VI_V+R_aI_V=U\end{aligned}\right\}\Rightarrow R_a=R_V\left(\frac{U}{U_V}-1\right)=R_V\left(n-1\right).$$

adnotații ……..

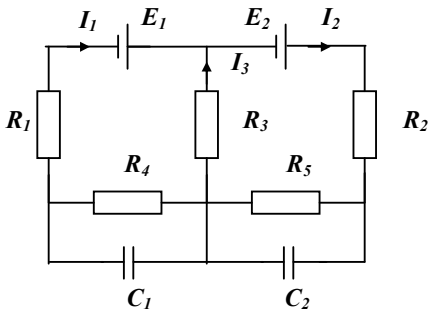


Figura 8.19

21. Să se deducă expresia intensității câmpului magnetic la o distanță d de un conductor filiform rectiliniu şi infinit lung, parcurs de un curent electric cu intensitatea I.

Rezolvare

Varianta I.

Fie $\mathrm{d}\vec{l}$ *un element de lungime de pe conductorul parcurs de curentul electric de intensitate I (figura 8.17).Atunci*

$$H = \frac{I}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}l}{r^2}\sin\alpha$$

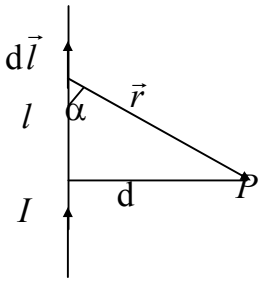


Figura 8.20

Pentru a introduce variabila α *se fac următoarele înlocuiri*

$$l = \mathrm{d}\cdot\mathrm{ctg}\,\alpha\,;\ \mathrm{d}l = -\frac{\mathrm{d}}{\sin^2\alpha}\mathrm{d}\alpha\,;\ r = \frac{\mathrm{d}}{\sin\alpha}$$

care conduc la

$$H = \frac{I}{4\pi\mathrm{d}}\int_{\pi}^{0}\sin\alpha\cdot\mathrm{d}\alpha = \frac{I}{2\pi\mathrm{d}}$$

Varianta II.

Considerăm un contur Γ *închis sub forma unui cerc de rază d, cu centrul pe conductor şi perpendicular pe conductor.*

Teorema lui Ampère (3.7) se scrie:

$$\oint_{\Gamma}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = B\cdot 2\pi\mathrm{d} = \mu_0 I \Rightarrow \mu_0 H\cdot 2\pi\mathrm{d} = \mu_0 I$$

, $H = \dfrac{I}{2\pi\mathrm{d}}$

Observații: Expresia $H = \dfrac{I}{2\pi\mathrm{d}}$ *poate fi găsită ca un caz particular a*

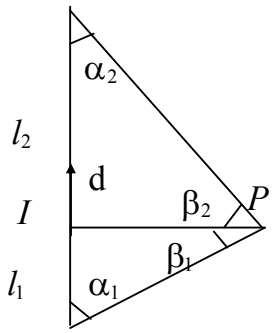


Figura 8.21

adnotații……

expresiei câmpului magnetic generat de un curent care trece printr-un conductor rectiliniu finit (figura 8.18)

În acest caz

$$H=\frac{I}{4\pi \mathrm{d}}\int \sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha=\frac{I}{4\pi \mathrm{d}}\int_{-\beta_1}^{\beta_2}\cos\beta\,\mathrm{d}\beta=\frac{\mathrm{I}}{4\pi \mathrm{d}}\left(\sin\beta_1+\sin\beta_2\right)$$

Dar $\sin\beta_1=\frac{l_1}{\sqrt{l_1^2+\mathrm{d}^2}}$, $\sin\beta_2=\frac{l_2}{\sqrt{l_2^2+\mathrm{d}^2}}$.

Astfel, se obține

$$H=\frac{I}{4\pi \mathrm{d}}\left(\frac{l_1}{\sqrt{l_1^2+\mathrm{d}^2}}+\frac{l_2}{\sqrt{l_2^2+\mathrm{d}^2}}\right)=\frac{I}{4\pi \mathrm{d}}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}}{l_1}\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}}{l_2}\right)^2}}\right)$$

Se observă că pentru conductorul infinit lung $l_1\to\infty$ *şi* $l_2\to\infty$ *iar* $H=\frac{I}{2\pi \mathrm{d}}$.

22. Să se deducă expresia intensității câmpului magnetic în interiorul unui conductor de rază r, conductorul este parcurs de un curent electric cu intensitatea I.

Rezolvare

Fie $r_1<r$ *raza unei porțiuni circulare din interiorul conductorului concentrică cu cea a conductorului (figura 8.18). Intensitatea curentului electric prin această porțiune este*

$$I_1=\int_S \vec{j}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=j\cdot\pi r_1^2=\frac{I}{\pi r^2}\cdot\pi r_1^2=I\frac{r_1^2}{r^2}$$

Din teorema lui Ampère

$$\int_\Gamma \vec{H}_1\cdot \mathrm{d}\vec{l}=H_1\cdot 2\pi r_1=i_1=I\frac{r_1^2}{r^2}$$

rezultă

$$H=I\frac{r_1}{2\pi r^2}.$$

23. Să se deducă expresia intensității câmpului magnetic în punctul P produs de un ansamblu de două conductoare filiforme rectilinii parcurse de curentul electric I (vezi figura 8.19). Se cunosc: α, θ1, l1=OA, θ2, l2=OB, d, I.

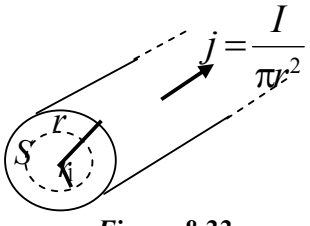


Figura 8.22

adnotații ……..

Rezolvare

În cazul din figura 3.9 se găseşte:

$$\mathrm{d}H = \frac{I \cdot \mathrm{d}l \cdot \sin(\alpha - \theta)}{4\pi r^2}$$

Din figură se observă că

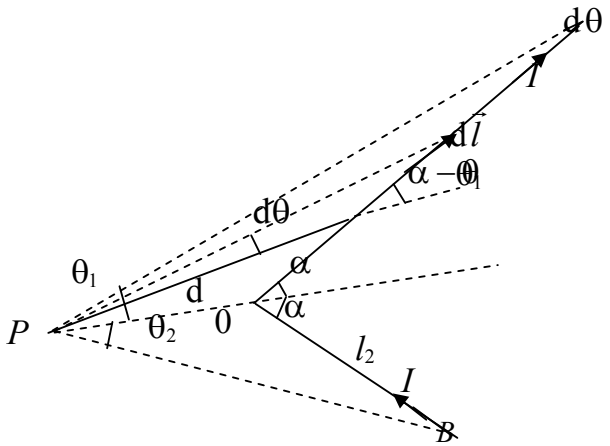


Figura 8.23

$$r\,\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}l \cdot \sin(\alpha - \theta) \text{ şi}$$

$$\frac{r}{\sin(\pi - \alpha)} = \frac{\mathrm{d}}{\sin(\alpha - \theta)}$$

Înlocuind pe dl şi r în expresia inițială, se găseşte

$$\mathrm{d}H = \frac{I \sin(\alpha - \theta)\mathrm{d}\theta}{4\pi \mathrm{d} \sin\alpha}.$$

Integrând, pentru fiecare din cele două porțiuni de conductor, se găseşte:

$$H_1 = \int_0^{\theta_1} \mathrm{d}H = I\frac{\cos(\alpha - \theta_1) - \cos\alpha}{4\pi \mathrm{d}\sin\alpha},$$

$$H_2 = \int_0^{\theta_2} \mathrm{d}H = I\frac{\cos(\alpha - \theta_2) - \cos\alpha}{4\pi \mathrm{d}\sin\alpha}.$$

Deoarece în punctul P cele două câmpuri au aceeaşi orientare, rezultă

$$H_P = H_1 + H_2 = \frac{I}{4\pi \mathrm{d}\sin\alpha}\left[\cos(\alpha - \theta_1) + \cos(\alpha - \theta_2) - 2\cos\alpha\right].$$

24. Să se deducă expresia forței care acționează asupra unui conductor l parcurs de curent şi aflat într-un câmp magnetic de inducție **Error!**

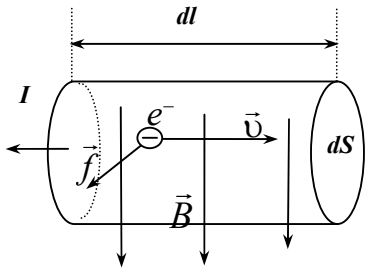


Figura 8.24

adnotații……

Objects cannot be created from editing field codes..

Rezolvare

Fie dl, lungimea unui conductor metalic străbătut de un curent de intensitate I, situat într-un câmp magnetic omogen de inducție $\vec{B}$. *Deoarece electronii liberi, în deplasare cu viteza v, se află într-un câmp magnetic, asupra fiecăruia va acționa forța:*

$$\vec{f} = e\left(\vec{v} \times \vec{B}\right); f = evB \cdot \sin\theta.$$

Deoarece electronii în mişcare (curentul electric) nu pot părăsi metalul, asupra tuturor electronilor aflați în conductorul de volum $s \cdot \mathrm{d}l$ *va acționa forța:*

$\mathrm{d}F = n_1 \cdot s \cdot \mathrm{d}l \cdot f = n_1 \cdot s \cdot \mathrm{d}l \cdot e \cdot v \cdot B \cdot \sin\theta$ *unde* n_1 *reprezintă numărul electronilor din unitatea de volum.*

Deoarece $I = \dfrac{q}{t} = \dfrac{n_1 \cdot s \cdot \mathrm{d}l \cdot e}{t} = n_1 \cdot s \cdot v \cdot e$, *pentru dF se obține:*

$\mathrm{d}F = I \cdot \mathrm{d}l \cdot B \cdot \sin\theta$, *sau* $\mathrm{d}\vec{F} = I\,\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$.

Pentru un conductor de lungime l, aceeaşi forță are expresia: $\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B}$.

25. Să se calculeze intensitatea câmpului magnetic:

a) în centrul unei spire circulare plane cu raza r, parcursă de un curent electric cu intensitatea I;

b) într-un punct situat pe axa unei spire circulare plane, la distanța x de centrul acesteia, spira fiind parcursă de un curent electric cu intensitatea I;

c) pe axa unui solenoid parcurs de un curent electric cu intensitatea I.

Rezolvare

a) Din formula Biot-Savart-Laplace se obține

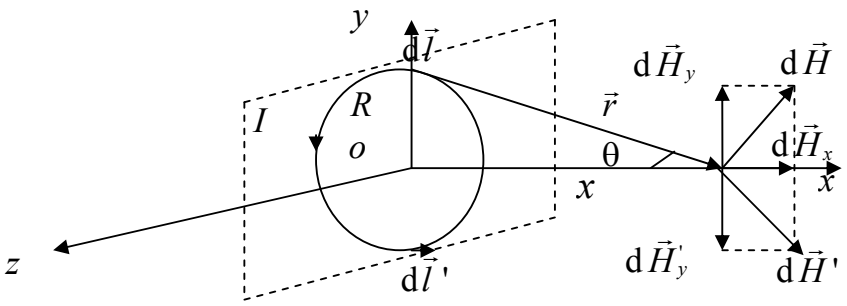


Figura 8.25

adnotații ……..

$$H = \frac{I}{4\pi r^2}\int_0^{2\pi r} \mathrm{d}l = \frac{I}{2r}.$$

b) Analizând figura 8.21 se observă că cele două componente $\mathrm{d}\vec{H}_y$ *şi* $\mathrm{d}\vec{H}_y'$ *ale câmpurilor* $\mathrm{d}\vec{H}$ *şi* $\mathrm{d}\vec{H}'$ *create în punctul P de elementele de curent* $\mathrm{d}\vec{l}$ *respectiv* $\mathrm{d}\vec{l}'$ *se anulează, rămânând doar componentele pe direcția axei Ox.*

Deci: $\mathrm{d}H_x = \mathrm{d}H\sin\theta = \dfrac{I\,\mathrm{d}l\cdot\sin\theta}{4\pi r^2}$

Deoarece $\sin\theta = \dfrac{R}{r}$ *şi* $r^2 = R^2 + x^2$

Se obține

$$\mathrm{d}H_x = \frac{IR\,\mathrm{d}l}{4\pi r\left(R^2+x^2\right)}.$$

Integrând, se obține

$$H_P = \frac{IR}{4\pi r\left(R^2+x^2\right)}\int_0^{2\pi R}\mathrm{d}l = \frac{IR^2}{2r\left(R^2+x^2\right)} = \frac{IR^2}{2\left(R^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Pentru N spire concentrice (bobină circulară), se obține

$$H = \frac{NIR^2}{2\left(R^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Dacă N=1 şi x=0 (centrul spirei) atunci din expresia de mai sus rezultă

$$H = \frac{I}{2R}.$$

adică expresia de la punctul a).

c) Fie n numărul de spire pe unitatea de lungime a solenoidului. Un segment dx de lungime a generatoarei solenoidului (figura 8.22) va avea $n\cdot\mathrm{d}x$ *spire.*

Ținând seama de expresia câmpului obținut la punctul b), intensitatea câmpului magnetic generat de cele $n\cdot\mathrm{d}x$ *spire va fi*

adnotații……

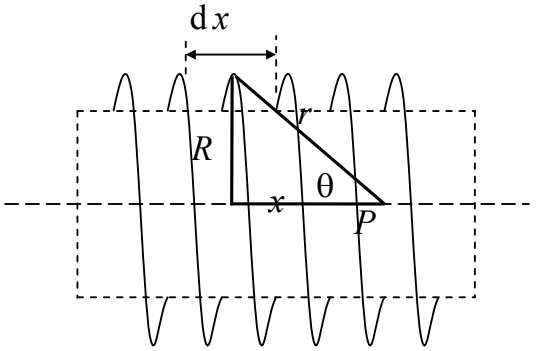


Figura 8.26

$$\mathrm{d}H = \frac{nIR^2}{2\left(R^2 + x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x.$$

Dar $\sin\theta = \frac{R}{r}$, $x = R \cdot \mathrm{ctg}\,\theta$ *şi* $\mathrm{d}x = \frac{R\,\mathrm{d}\theta}{\sin^2\theta}$..

În felul acesta, se obține

$$\mathrm{d}H = \frac{nIR^3\,\mathrm{d}\theta}{2\left(R^2 + x^2\right)^{\frac{3}{2}}\sin\theta} = \frac{1}{2}nI\sin\theta \cdot \mathrm{d}\theta.$$

Notând cu θ_1 *şi* θ_2 *valorile unghiurilor corespunzătoare capetelor solenoidului, se obține*

$$H = \frac{nI}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta \cdot \mathrm{d}\theta = \frac{nI}{2}\left(\cos\theta_1 - \cos\theta_2\right).$$

Pentru un solenoid infinit lung, $\theta_1 = 0$ *şi* $\theta_2 = \pi$ *şi astfel*

$$H = nI = \frac{N}{l}I.$$

unde N reprezintă numărul de spire bobinate pe lungimea l a solenoidului.

26. Să se calculeze fluxul magnetic între două conductoare paralele cu diametrul D dacă distanța între conductoare este d, iar intensitatea curentului prin acestea este I. Calculul se va face pentru o lungime a liniei l, cele două conductoare fiind parcurse de curenți de sens contrar.

Rezolvare

Câmpul în interiorul conductoarelor datorat curenților proprii (vezi problema 2) este

adnotații ……..

$$H_{1x} = \frac{I}{2\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2} x$$

unde x este distanța de la axa conductorului până la un punct situat spre marginea conductorului.

Între cele două conductoare intensitatea câmpului magnetic (vezi problema 1) este

$$H_{2x} = \frac{I}{2\pi x}$$

unde x este distanța de la marginea conductorului până la un punct.

Fluxul câmpului magnetic (în aer) între cele două conductoare, printr-un element de suprafață $\mathrm{d}S = l \cdot \mathrm{d}x$ *este*

$$\mathrm{d}\phi = \mathrm{d}\phi_1 + \mathrm{d}\phi_2 = \vec{B}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \vec{B}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{S} = B_1 l\,\mathrm{d}x + B_2 l\,\mathrm{d}x\,.$$

Fluxul total este

$$\phi = 2\mu_0\mu_r \frac{Il}{2\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2}\int_0^{\frac{D}{2}} x \cdot \mathrm{d}x + 2\mu_0 \frac{Il}{2\pi}\int_{\frac{D}{2}}^{\mathrm{d}} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \mu_0 \frac{Il}{\pi}\left(\mu_r + \ln\frac{2\mathrm{d}}{D}\right).$$

27. Să se deducă expresiile inducțiilor (inductivităților proprii) pentru:

a) bobină cilindrică (solenoid) cu N spire, lungimea l şi secțiunea unei spire S;

b) pentru o bobină toroidală cu N spire şi raza medie r.

Rezolvare

a) $\phi_{sol} = N\phi_{spira} = N \cdot B \cdot S = N\mu_0\mu_v \frac{Ni}{l} S = \mu_0\mu_v \frac{N^2 S}{l} i = L_{sol} i \Rightarrow$

$$L_{sol} = \mu_0\mu_v \frac{N^2 S}{l}$$

b) $\phi_{bob} = N\phi_{spira} = N \cdot B \cdot S = N\mu_0\mu_v \cdot H \cdot S$

Dar

$$\int_\Gamma \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = Ni \Rightarrow \int_\Gamma \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_0^{2\pi r} H \cdot \mathrm{d}l = H \cdot 2\pi r = Ni \Rightarrow$$

$$H = \frac{Ni}{2\pi r}.$$

Astfel:

$$\phi_{bob} = N\mu_0\mu_v \frac{Ni}{2\pi r} \cdot S = \mu_0\mu_v \frac{N^2 S}{2\pi r} \cdot i = L_{bob} \cdot i \Rightarrow$$

adnotații……

$$L_{bob} = \mu_0 \mu_v \frac{N^2 S}{2\pi r}.$$

28. Să se calculeze forța exercitată de câmpul magnetic creat de un curent rectiliniar foarte lung cu intensitatea I1=20A asupra unui circuit circular de rază R=0,2m parcurs de un curent I2=10A şi situat în acelaşi plan cu I1.

Rezolvare

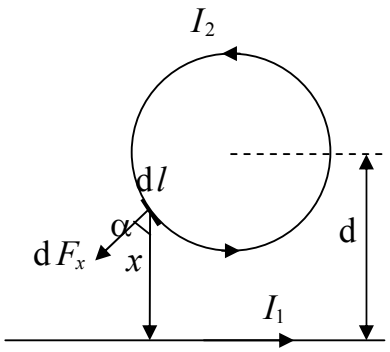


Figura 8.27

Distanța între centrul cercului şi conductorul rectiliniu este d=0,5m (figura 8.23)

Forța exercitată asupra elementului dl de conductorul circular aflat la distanța x de curentul I1 este

$$\mathrm{d}F_x = \mu_0 \frac{I_1 \cdot I_2 \, \mathrm{d}l}{2\pi x}.$$

Componentele celor două forțe simetrice dFx după direcția paralelă cu I1 dau rezultantă nulă, astfel încât forța totală va fi

$$F = 2\int_0^{\pi} \mathrm{d}F_x \cos\alpha = \frac{I_1 I_2}{\pi}\mu_0 \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}l \cos\alpha}{x} = \frac{I_1 I_2 \mu_0}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x \cos\alpha}{x \sin\alpha} =$$

$$= \frac{I_1 I_2 \mu_0}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{x}\mathrm{ctg}\alpha;$$

dar $\mathrm{ctg}\alpha = \dfrac{\mathrm{d}-x}{\sqrt{R^2-(\mathrm{d}-x)^2}}$;

Înlocuind în expresia lui F se obține

$$F = \frac{I_1 I_2 \mu_0}{\pi}\int_{\mathrm{d}-R}^{\mathrm{d}+R} \frac{(\mathrm{d}-x)\mathrm{d}x}{x\left[R^2-(\mathrm{d}-x)^2\right]^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{I_1 I_2 \mu_0}{\pi}\left[\mathrm{d}\int_{\mathrm{d}-R}^{\mathrm{d}+R} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{R^2-(\mathrm{d}-x)^2}} - \int_{\mathrm{d}-R}^{\mathrm{d}+R} \frac{\mathrm{d}x}{\left[R^2-(\mathrm{d}-x)^2\right]^{\frac{1}{2}}}\right] =$$

$$= \frac{I_1 I_2 \mu_0}{\pi}\left(\frac{\mathrm{d}}{\sqrt{\mathrm{d}^2-R^2}}-1\right) = \frac{2\cdot 10^2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{\pi}\left(\frac{0,5}{\sqrt{0,25-0,04}}-1\right) \Rightarrow .$$

$$F = 7,2\cdot 10^{-6}\,\mathrm{N}$$

✍ adnotații ……..

29. Un electron accelerat sub diferența de potențial U=102V pătrunde într-un câmp magnetic uniform de inducție B=10-3 T sub unghiul α=15° cu direcția câmpului magnetic. Să se calculeze raza R, pasul p al traiectoriei elicoidale precum şi perioada de rotație. Se dă: e=1,6·10-19C; m=9,1·10-31kg.

Rezolvare

$$v=\sqrt{\frac{2\cdot e\cdot U}{m}}=\sqrt{\frac{2\cdot 1,6\cdot 10^{-19}\cdot 10^{2}}{9,1\cdot 10^{-31}}}=5,95\cdot 10^{6}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$R=\frac{mv\sin\alpha}{e\cdot B}=\frac{9,1\cdot 10^{-31}\cdot 5,95\cdot 0,258\cdot 10^{6}}{1,6\cdot 10^{-19}\cdot 10^{-3}}=8,7\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$$

$$P=\frac{2\pi m}{eB}v\cos\alpha=\frac{6,28\cdot 9,1\cdot 10^{-31}\cdot 5,95\cdot 10^{6}\cdot 0,9376}{1,6\cdot 10^{-19}\cdot 10^{-3}}=1,98\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}$$

$$T=\frac{2\pi m}{eB}=\frac{6,28\cdot 9,1\cdot 10^{-31}}{1,6\cdot 10^{-19}\cdot 10^{-3}}=3,575\cdot 10^{-8}\,\mathrm{s}$$

30. Să se deducă expresia intensității câmpului magnetic într-o bobină toroidală parcursă de curent electric.

Rezolvare

Considerăm un contur închis Γ sub forma unui cerc de rază r concentric cu bobina toroidală. Aplicând formula (3.8), se obține:

$$\oint_{\Gamma}\vec{H}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=N\cdot I$$

$$H\cdot 2\pi r=NI\Rightarrow H=\frac{NI}{2\pi r}.$$

31. Se consideră un conductor filiform de forma celui din figura 3.17 şi cu datele prezentate. Să se calculeze intensitatea câmpului magnetic în punctul P (în funcție de I şi d).

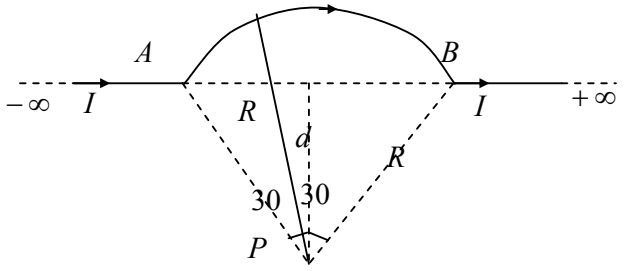


Figura 8.28

adnotații……

Rezolvare

$$H_P = H_{\substack{-\infty,+\infty \\ liniar}} - H_{\substack{AB \\ liniar}} + H_{\substack{AB \\ circular}} = \frac{I}{2\pi \mathrm{d}} - \frac{I}{2\pi \mathrm{d}} 2 \cdot \sin\alpha + \frac{I}{4\pi R} \int_0^{\frac{2\pi R}{6}} \mathrm{d}l$$

Deoarece:

$$\alpha = 30° \text{ şi } R = \frac{\mathrm{d}}{\cos\alpha},$$

se obține: $$H = \frac{I}{4\pi \mathrm{d}} \left(1 + \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\right).$$

✍ adnotații ……..

TEST DE AUTOEVALUARE

II.1. Care din expresiile de mai jos nu este teorema lui Gauss:

b) Error! Objects cannot be created from editing field codes.

c) Error! Objects cannot be created from editing field codes.;

d) Error! Objects cannot be created from editing field codes..

Justificați ✍……..……..…..……...……...……
……
……
……..……...……

II.2. Pentru energia electrostatică înmagazinată între armăturile unui condensator plan cu aer, având suprafața armăturilor S, distanța dintre armături d, tensiunea şi câmpul între armături U, respectiv E, iar capacitatea electrică C, se pot scrie expresiile:

a) Error! Objects cannot be created from editing field codes.;

b) Error! Objects cannot be created from editing field codes.;

c) Error! Objects cannot be created from editing field codes..

Justificați ✍……..……..…..……...……...……
……
……
……..……...……

II.3. Care din relațiile de mai jos arată că un câmp electrostatic este un câmp conservativ?

a) Error! Objects cannot be created from editing field codes.(**Error! Objects cannot be created from editing field codes.** - element de lungime pe curba Γ):

b) Error! Objects cannot be created from editing field codes.(**Error! Objects cannot be created from editing field codes.** - element de suprafață);

c) Error! Objects cannot be created from editing field codes.(**Error! Objects cannot be created from editing field codes.** - element de suprafață).

Justificați ✍……..……..……..……..……..……
……
……
……..……..……

II.4. Care din următoarele expresii reprezintă ecuația lui Poisson?

a) Error! Objects cannot be created from editing field codes.;

b) Error! Objects cannot be created from editing field codes.;

c) Error! Objects cannot be created from editing field codes..

Justificați ✍……..……..……..……..……..……
……
……
……..……..……

II.5. Teorema conservării sarcinilor electrice în regim electrocinetic staționar se exprimă prin relația:

a) Error! Objects cannot be created from editing field codes.;

b) Error! Objects cannot be created from editing field codes.;

c) Error! Objects cannot be created from editing field codes..

Justificați ✍……..……..……..……..……..……
……
……
……..……..……

II.6. Afirmațiile: intensitatea curentului de conducție care intră într-o suprafață închisă este egală cu cea care iese din acea suprafață respectiv intensitatea curentului electric este aceeaşi de-a lungul unui conductor electric, sunt descrise de expresiile:

a) Error! Objects cannot be created from editing field codes.;

b) Error! Objects cannot be created from editing field codes.;

c) Error! Objects cannot be created from editing field codes..

Justificați ✍……..……..……..……..……..……
……
……
……..……..……

✍ adnotații……
……
……

✍ adnotații …..

II.7. Câmpul electrostatic este un câmp conservativ iar câmpul magnetic este un câmp rotațional. Care din grupul de relații de mai jos descriu corect şi un câmp şi celălalt?

a) Error! Objects cannot be created from editing field codes., **Error! Objects cannot be created from editing field codes.**;

b) Error! Objects cannot be created from editing field codes., **Error! Objects cannot be created from editing field codes.**;

c) Error! Objects cannot be created from editing field codes., **Error! Objects cannot be created from editing field codes.**.

Justificați ✍……..……..…..……..……..……

II.8. Care din expresiile de mai jos reprezintă formula lui Biot-Savart-Laplace?

a) Error! Objects cannot be created from editing field codes.

b) Error! Objects cannot be created from editing field codes.

c) Error! Objects cannot be created from editing field codes.

Justificați ✍……..……..…..……..……..……

II.9. Dacă o particulă cu masa m şi sarcina q pătrunde perpendicular pe liniile unui câmp magnetic atunci sub acțiunea forței **Error! Objects cannot be created from editing field codes.** descrie o traiectorie circulară de rază R. Pentru accelerația mişcării (şi pentru lucrul mecanic L) al forței F, care grup de relații este adevărat?

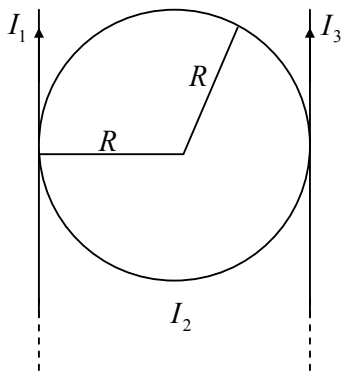
a) Error! Objects cannot be created from editing field codes., **Error! Objects cannot be created from editing field codes.**;

b) Error! Objects cannot be created from editing field codes., **Error! Objects cannot be created from editing field codes.**;

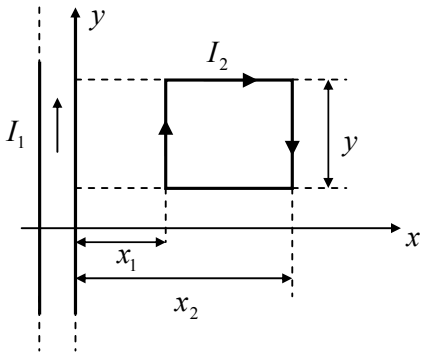
c) Error! Objects cannot be created from editing field codes., **Error! Objects cannot be created from editing field codes.**.

adnotații……

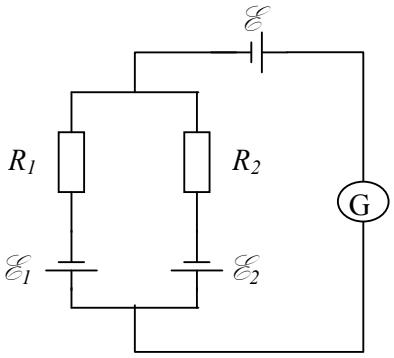
II.10. Care este intensitatea câmpului magnetic (în aer) în centrul cercului de rază R=5cm datorat curenților I_1=30A, I_2=20A şi I_3=10A (figura 3.22)



II.11.Să se calculeze modulul forței rezultante care acționează asupra circuitului dreptunghiular parcurs de curentul I_2 (figura alăturată) din partea curentului rectiliniu I_1.



II.12. Fie circuitul a cărui schemă este reprezentată în figura alăturată. Ştiind că prin galvanometrul G curentul este nul să se deducă expresia t.e.m. $\mathscr{E}$ în funcție de $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$, R_1, R_2.



II.13. Un electron $\left(e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\text{C},\ m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\text{kg}\right)$ este accelerat, din repaus, sub o diferență de potențial $U_a = 10^4\,\text{V}$. După accelerare electronul pătrunde perpendicular pe câmpul electric dintre armăturile unui condensator plan între armăturile căruia este aplicată o tensiune $U_C = 10^2\,\text{V}$. Cunoscând distanța dintre armături d=2cm, lungimea spațiului parcurs paralel cu armăturile, l=20cm, distanța dintre condensator şi un ecran fluorescent D=1m, să se calculeze deviația Y de la direcția inițială în momentul impactului electronului cu ecranul.

✍ adnotații ……

BIBLIOGRAFIE

[1] ***Moşescu***, N.; ***Hotinceanu***, M., (1987), *Îndrumar pentru disciplina – FIZICA*, volumul II, Ploieşti, Institutul Petrol şi Gaze Ploieşti

[2] ***Luca***, E.; ***Ciubotariu***, C.; ***Zet***, Gh.; ***Vasiliu***, A., (1986), *Fizică*, Bucureşti, Editura Didactică şi Pedagogică

[3] ***Nicula***, Al.; ***Cristea***, Gh., ***Simon***, S., (1982), *Electricitate şi magnetism*, Bucureşti, Editura Didactică şi Pedagogică

[4] ***Dima***, I.; ***Gherbanovschi***, N.; ***Secăreanu*** I., (1981), *Electricitate şi magnetism (Note de curs)*, Bucureşti, Universitatea Bucureşti

[5] ***Tutovan***, V.; ***Gotlieb***, I., (1998), *Electricitate şi magnetism*, *Probleme de electrostatică*, Chişinău, Editura Tehnică

[6] ***Purcell***, E. M., (1982), *Electricitate şi magnetism (Cursul de fizică Berkeley, vol II)*, Bucureşti, Editura Didactică şi Pedagogică

[7] ***Hagiescu***, M.; ***Hotinceanu*** M., (1979), *Probleme şi aplicaţii pentru cursul de fizică*, Ploieşti, Institutul Petrol şi Gaze

[8] ***Popescu***, I. M.; ***Cone***, G. F.; Stanciu, G. A., (1996), *Culegerea de probleme de fizică*, Bucureşti, Editura Didactică şi Pedagogică

[9] ***Inţa***, I.; ***Dumitru***, S., (1982), *Complemente de fizică*, Bucureşti, Editura Tehnică

[10] ***Tutovan***, V., (1984), *Electricitate şi magnetism,* Bucureşti, Editura Tehnică

[11] ***Feynman***, R. P., (1970), *Fizica modernă – Electromagnetismul, structura materiei,* Bucureşti, Editura Tehnică

[12] ***Creţu***, T., (1984), *Fizica Generală, vol I*, Bucureşti, Editura Tehnică

[13] ***Hotinceanu***, M., (2001), *Probleme şi lucrări de laborator de electromagnetism*, Ploieşti, Editura ILEX şi Editura Universităţii din Ploieşti,

[14] ***Saimac***, A.; ***Cruceru***, C., (1981), *Electrotehnică*, Bucureşti, Editura didactică şi Pedagogică Bucureşti

[15] ***Luca***, E., (1976), *Elemente de fizică modernă*, (21), Iaşi, Editura Junimea

RĂSPUNSURI TEST AUTOEVALUARE

II.1. d);

II.2. a);

II.3. a);

II.4. b);

II.5. b);

II.6. a);

Modulul III. ELECTROMAGNETISM

Obiectivele modului

- *Cunoaşterea noţiunilor de bază ale fenomenelor electromagnetice*
- *Electrodinamica*
- *Unde electromagnetice şi fenomene produse de acestea*
- *Aplicaţii ale ecuaţiilor lui Maxwell*

Cuprins Modulul III

9. INDUCŢIA ELECTROMAGNETICĂ 180
9.1 Fenomenul de inducţie electromagnetică 180
9.2 Energia câmpului magnetic 182
10. ECUAŢIILE LUI MAXWELL 183
10.1 Inducţia electromagnetică şi curentul de deplasare 183
10.2 Ecuaţiile lui Maxwell 186
11. UNDE ELECTROMAGNETICE 189
11.1 Oscilaţii şi unde electromagnetice 189
11.2 Polarizarea undelor electromagnetice 193
11.2.1 Starea de polarizare a undelor electromagnetice 193
11.2.2 Propagarea undelor electromagnetice în medii anizotrope 198
11.2.3 Birefringenţa provocată 200
11.2.4 Efectul Kerr 200
11.2.5 Efectul Cotton - Moutton 202
11.2.6 Efectul Faraday 202
11.2.7 Alte efecte de birefringentă provocată 203
11.2.8 Efectul Pockels 203
11.3 Fenomene produse de undele electromagnetice 203
11.3.1 Interferenţa luminii 204
11.3.2 Difracţia luminii 207
11.3.3 Absorbţia luminii 209
11.3.4 Dispersia luminii 210
12. PROBLEME. MODELE OPERAŢIONALE 211
BIBLIOGRAFIE 217

adnotaţii……

9. INDUCŢIA ELECTROMAGNETICĂ

9.1 Fenomenul de inducţie electromagnetică

În capitolele "Electrostatica" şi "Magnetostatica" au fost studiate câmpurile electrice şi magnetice statice $\vec{E}(x,y,z),\ \vec{B}(x,y,z)$. Majoritatea fenomenelor electrice şi magnetice au loc pentru câmpuri electrice şi magnetice variabile în timp $\vec{E}(x,y,z,t),\ \vec{B}(x,y,z,t)$. Obiectul electromagnetismului este tocmai studierea fenomenelor electrice şi magnetice variabil în timp. Un aemenea fenomen important este inducţia electromagnetică.

Inducţia electromagnetică reprezintă fenomenul de apariţie a unei tensiuni într-un circuit electric străbătut de un flux magnetic variabil în timp. Acest fenomen poate fi pus în evidenţă printr-o experienţă simplă Inducţia electromagnetică

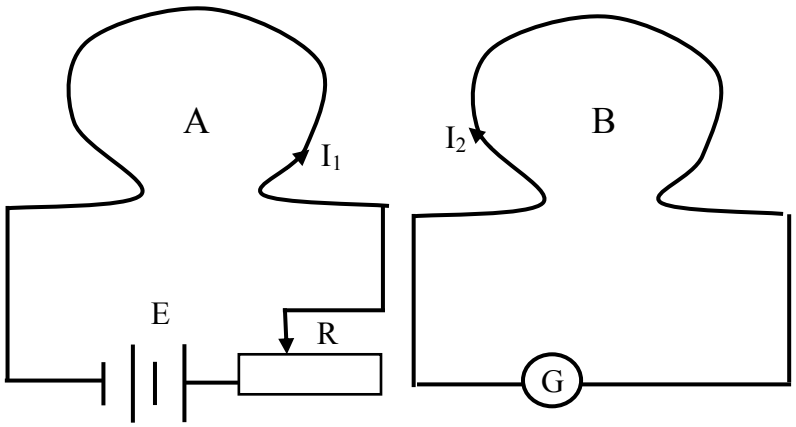


Figura 9.1

reprezintă fenomenul de apariţie a unei tensiuni într-un circuit electric străbătut de un flux magnetic variabil în timp. Acest fenomen poate fi pus în evidenţă printr-o experienţă simplă Inducţia electromagnetică reprezintă fenomenul de apariţie a unei tensiuni într-un circuit electric străbătut de un flux magnetic variabil în timp. Acest fenomen poate fi pus în evidenţă printr-o experienţă simplă Inducţia electromagnetică reprezintă fenomenul de apariţie a unei tensiuni într-un circuit electric străbătut de un flux magnetic variabil în timp. Acest fenomen poate fi pus în evidenţă printr-o experienţă simplă (fig. 9.1).

adnotaţii……

În figura menţionată A şi B sunt două circuite închise. Atât timp cât cursorul reostatului R este lăsat într-o poziţie fixă, intensitatea curentului electric I_1 din circuitul A este constant şi în circuitul B nu este observată prezenţa unui curent electric (acul galvanometrului G este la zero). Mişcând cursorul reostatului R se modifică rezistenţa circuitului A şi deci şi intensitatea I_1 a curentului din acest circuit. Câmpul magnetic creat de acest curent va fi şi el variabil. În acest caz se observă că galvanometrul G din circuitul B indică trecerea unui curent electric. Câmpul magnetic creat de curentul din circuitul A se numeşte câmp inductor iar curentul care ia naştere în circuitul B, curent indus.

Fenomenul de inducţie electromagnetică se supune următoarelor două legi.

Tensiunea electromotoare de inducţie electromagnetică E, în lungul unei curbe închise este egală cu viteza de variaţie (luată cu semnul minus) a fluxului magnetic prin orice suprafaţă deschisă care se sprijină pe această curbă

$$E = -\frac{d\Phi}{dt}. \qquad (9.1)$$

Tensiunea electromotoare de inducţie are un astfel de sens încât fluxul magnetic al curentului indus se opune variaţiei fluxului magnetic inductor (legea lui Lenz).

Din formula fluxului magnetic care străbate o suprafaţă S, a cărei normală face un unghi α cu direcţia câmpului de inducţie $\vec{B}$,

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = \mu \cdot H \cdot S \cdot \cos\alpha. \qquad (9.2)$$

se observă că fluxul magnetic depinde de patru mărimi μ, H, S şi α. Variaţia oricărei dintre ele produce schimbarea fluxului Φ, ceea ce are ca rezultat apariţia unui curent de inducţie într-un circuit plasat în câmpul respectiv.

În practică acest fenomen este întâlnit în multe domenii în care este util sau poate fi stânjenitor.

Revenind la circuitele din figura 9.1, s-a arătat că în regiunea din spaţiu în care se găseşte circuitul B este creat un câmp magnetic de inducţie $\vec{B}$ de către curentul I_1, din circuitul A. Acest câmp este funcţie de punctul în care este determinat dar în acelaşi timp, în orice punct, este proporţional cu I_1. Rezultă, deci, că fluxul Φ_{BA} al câmpului magnetic prin aria mărginită de circuitul B este proporţional cu I_1

adnotaţii……

$$\Phi_{BA} = M \cdot I_1 . \quad (9.3)$$

Coeficientul de proporţionalitate M se numeşte coeficient de inducţie mutuală sau inductanţă mutuală dintre cele două circuite.

Aceluiaşi câmp îi corespunde un flux Φ_A, prin aria mărginită de propriul circuit (circuitul A), care este şi el proporţional cu I_1

$$\Phi_A = L \cdot I_1 . \quad (9.4)$$

Coeficientul L poartă numele de coeficient de autoinducţie, coeficient de selfinducţie sau inductanţă proprie.

Variaţia fluxului Φ_A prin circuitul A datorită variaţiei intensităţii I_1 a curentului prin acelaşi circuit va conduce la apariţia unei tensiuni electromotoare de inducţie proprie (autoinducţie)

$$E = -L \cdot \frac{dI_1}{dt} . \quad (9.5)$$

9.2 Energia câmpului magnetic

Se consideră o bobină toroidală (fig. 9.2) formată din N spire foarte apropiate (dese) astfel încât la trecerea unui curent de intensitate I, datorat unei tensiuni electromotoare E aplicată la capetele conductorului, câmpul magnetic să fie

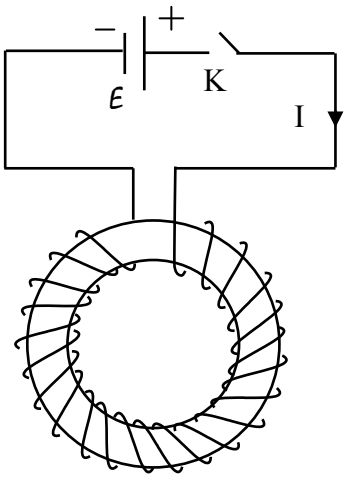


Figura 9.2

concentrat în întregime în interiorul acesteia.

În intervalul de timp dt prin bobină trece o cantitate de electricitate $dq = I \cdot dt$ şi deci energia consumată (lucrul mecanic efectuat) prin aceasta este

$$dW = dq \cdot E = E \cdot I \cdot dt \quad (9.6)$$

Pe seama acestei energii se formează câmpul magnetic dH. Variaţia acestui câmp magnetic conduce la apariţia unei tensiuni electromotoare de inducţie E_i care echilibrează tensiunea E

$$\left|E_i\right| = \left|-\frac{d\Phi}{dt}\right| = \left|-\frac{d}{dt}\left(N\Phi_1\right)\right| = E\,, \qquad (9.7)$$

Φ_1 este fluxul ce străbate o singură spiră.

Din legea lui Ampère

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = NI$$

se obţine $N\cdot I = H\cdot l$, unde l este lungimea bobinei.

În acest fel expresia (9.6)devine

$$\mathrm{dW} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(N\Phi_1\right)\cdot\frac{H\cdot l}{N}\cdot dt = \frac{d\Phi_1}{dt}\cdot H\cdot l\cdot dt = \frac{d\left(B\cdot S\right)}{dt}\cdot H\cdot l\cdot dt = \frac{d\left(\mu_0 H\right)}{dt}\cdot S\cdot H\cdot l\cdot dt =$$
$$= \mu_0\cdot S\cdot l\cdot H\cdot dH = \mu_0\cdot V\cdot H\cdot dH$$

Integrând,

$$\int_0^W dW = \mu_0\cdot V\cdot\int_0^H HdH\,,$$

se obţine

$$W = \frac{1}{2}\mu_0 V H^2\,.$$

Pentru densitatea de energie a câmpului magnetic se obţine

$$w = \frac{W}{V} = \frac{1}{2}\mu_0\cdot H^2 = \frac{1}{2}B\cdot H = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}\,. \qquad (9.8)$$

10. ECUAŢIILE LUI MAXWELL

10.1 Inducţia electromagnetică şi curentul de deplasare

Fenomenul de inducţie electromagnetică constă în apariţia unei tensiuni electromotoare de inducţie (E) într-un circuit străbătut de un flux magnetic variabil. Existenţa tensiunii electromotoare implică şi prezenţa unui câmp electric $\vec{E}$ care să satisfacă relaţiile

adnotaţii……

adnotaţii……

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = E = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_{S} \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\int_{S} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \,. \qquad (10.9)$$

Aplicând teorema lui Stokes

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{S} \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{S} \,,$$

din relaţia (10.9), rezultă

$$-\int_{S} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \int_{S} \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

sau

$$\nabla \times \vec{E} \equiv rot\, \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \,. \qquad (10.10)$$

Această relaţie reprezintă legea inducţiei electromagnetice scrisă sub formă vectorială şi arată că un câmp magnetic variabil în timp generează un câmp electric rotaţional.

Dacă conturul Γ care intervine în (10.9) are viteza $\vec{v}$ în câmpul magnetic $\vec{B}$ atunci t.e.m. indusă are forma generală

$$\int_{\Gamma} \vec{E} d\vec{l} = -\int_{S} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} + \oint_{\Gamma} \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) d\vec{l} \,. \qquad (10.11)$$

Un fenomen reciproc fenomenului de inducţie electromagnetică este următorul: se poate obţine într-o regiune a spaţiului un câmp magnetic variabil dacă fluxul inducţiei electrice prin acea regiune variază. Pentru a înţelege acest fenomen, se reaminteşte că atunci când se introduce un dielectric între armăturile unui condensator încărcat are loc fenomenul de polarizare a dielectricului. Dacă tensiunea aplicată este variabilă (eventual alternativă), deci şi câmpul electric dintre armăturile este variabil, atunci are loc în permanenţă deplasări ale sarcinilor electrice din dielectric. Deplasarea sarcinilor din moleculele dielectricului, aflate în câmp electric variabil, constituie un curent electric. Acest curent circulă, deci, prin dielectric numai când câmpul electric este variabil. El poartă numele de curent de polarizare deoarece se datorează deplasării sarcinilor care polarizează dielectricul. Curentul de polarizare continuă în dielectric circulaţia curentului de conducţie din circuitul electric extern. Experienţa mai arată că un curent variabil circulă chiar dacă în circuit

adnotaţii……

se află un condensator fără dielectric, adică un condensator cu vid. În acest caz circuitul se închide în condensator printr-un curent numit de deplasare în vid. Din punct de vedere clasic curentul de deplasare în vid nu are un sens intuitiv, nu poate fi legat de deplasarea unor sarcini electrice. Explicaţia (interpretarea) acestui curent poate fi însă dată în mecanica cuantică.

Deci, prin densitate de curent de deplasare (j_d) se va înţelege suma

$$j_d = j_v + j_p, \tag{10.12}$$

dintre densitatea de curent de deplasare în vid (j_v) şi densitatea de curent de polarizare (j_p). Apelând la cunoştinţele acumulate la paragraful "Polarizaţia electronică", se poate scrie

$$j_p = \frac{I_p}{S} = \frac{1}{S}\cdot\frac{\mathrm{d}Q_p}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{S}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sigma_p \cdot S\right) = \frac{\mathrm{d}\sigma_p}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = \dot{P}. \tag{10.13}$$

După cum modulul vectorului densitate a curentului de polarizare este egal cu viteza de variaţie a densităţii sarcinilor legate (10.13), tot aşa se poate admite că modulul j_v al vectorului densitate de curent de deplasare în vid este egal cu viteza de variaţie a densităţii sarcinilor libere, de pe armăturile condensatorului

$$j_v = \frac{\partial\sigma}{\partial t}. \tag{10.14}$$

Deoarece intensitatea câmpului electric în spaţiul vid dintre armăturile condensatorului este: $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$, rezultă

$$j_v = \frac{\partial\sigma}{\partial t} = \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial E}{\partial t},$$

sau

$$\vec{j}_v = \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \varepsilon_0 \cdot \dot{\vec{E}}. \tag{10.15}$$

Introducând (10.15) şi (10.13) în (10.12) se obţine

$$\vec{j}_{\mathrm{d}} = \varepsilon_0 \cdot \dot{\vec{E}} + \dot{\vec{P}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\varepsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P}\right) = \frac{\mathrm{d}\vec{D}}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{D}}. \tag{10.16}$$

Densitatea de curent total, $\vec{j}_t$, este suma dintre densitatea curentului de conducţie $\vec{j}$ şi a celui de deplasare $\vec{j}_d$

adnotaţii……

$$\vec{j}_t = \vec{j} + \vec{j}_d = \vec{j} + \dot{\vec{D}}.$$

În acest caz teorema lui Ampère se scrie

$$I = \oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{\Sigma} \left(\vec{j} + \dot{\vec{D}} \right) \cdot d\vec{S} . \qquad (10.17)$$

Ţinând seama de formula lui Stokes, din (10.17) rezultă

$$\nabla \times \vec{H} \equiv rot\, \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \qquad (10.18)$$

Relaţia de mai sus arată că un câmp electric variabil în timp şi un curent de conducţie creează un câmp magnetic.

10.2 Ecuaţiile lui Maxwell

Pe parcursul prezentei lucrări au fost deduse următoarele ecuaţii

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} \equiv \operatorname{div} \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} & (1) \\ \nabla \times \vec{E} \equiv \operatorname{rot} \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} & (2) \\ \nabla \cdot \vec{B} \equiv \operatorname{div} \vec{B} = 0 & (3) \\ \nabla \times \vec{H} \equiv \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} & (4) \end{cases} \qquad (10.19)$$

Ecuaţiile (10.19) sunt cunoscute sub numele de ecuaţiile lui Maxwell.

Analizând aceste ecuaţii [(10.19)(2) şi (10.19)(4)] se observă că cele două câmpuri – cel electric şi cel magnetic – sunt legate indisolubil între ele şi formează câmpul electromagnetic. Câmpul electromagnetic este un câmp rotaţional. Prezenţa, însă, în aceeaşi regiune din spaţiu a unui câmp electrostatic şi a unui câmp magnetostatic nu înseamnă că avem de-a face cu un câmp electromagnetic. Înţelegerea clară a ceea ce înseamnă câmp electromagnetic rezultă foarte bine din cea de a doua şi cea de a patra ecuaţie din grupul (10.19). Din aceste ecuaţii rezultă că în jurul unui câmp magnetic variabil în timp ($\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq 0$) apare un câmp electric rotaţional ($rot\, \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$) iar un curent de conducţie ($\vec{j}$) şi un curent de deplasare ($\dot{\vec{D}}$) vor crea un câmp magnetic rotaţional. Deci câmpul electric variabil apare în toate punctele

adnotaţii……

spaţiului în care există un câmp magnetic variabil în timp şi orice câmp magnetic variabil în timp este legat de prezenţa unui câmp electric variabil în timp. Ansamblul celor două câmpuri care se generează reciproc şi sunt localizate simultan în aceeaşi regiune din spaţiu se numeşte câmp electromagnetic.

Pentru determinarea câmpurilor electrice şi magnetice, ecuaţiile lui Maxwell se completează cu aşa numitele relaţii de material

$$\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E}\,,$$

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}\,, \qquad (10.20)$$

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}\,. \qquad (10.21)$$

Cu ajutorul ecuaţiilor lui Maxwell se poate arăta că cele două câmpuri, electric şi magnetic, variabile în timp, satisfac ecuaţia undelor. În acest scop vom aplica formula dublului produs vectorial $\left[\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\vec{b}\cdot\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)-\vec{c}\cdot\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\right]$ celei de-a doua ecuaţii din grupul (10.19)

$$\nabla\times\left(\nabla\times\vec{E}\right)=\nabla\cdot\left(\nabla\cdot\vec{E}\right)-\nabla^2\cdot\vec{E}=-\Delta\vec{E} \qquad (10.22)$$

deoarece $\nabla\cdot\left(\nabla\cdot\vec{E}\right)=0$ urmare a faptului că $\nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\neq 0$ este echivalent cu $\nabla\cdot\vec{E}=0$.

Asupra aceleaşi ecuaţii vom efectua următoarea operaţie

$$\nabla\times\left(\nabla\times\vec{E}\right)=\nabla\times\left(-\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right)=-\mu\cdot\left(\nabla\times\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right)=-\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\times\vec{H}\right)=$$

$$=-\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)==-\mu\cdot\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}. \qquad (10.23)$$

Din (10.22) şi (10.23) se obţine

$$\Delta\vec{E}=\varepsilon\cdot\mu\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}. \qquad (10.24)$$

În mod analog se găseşte

$$\Delta\vec{H}-\varepsilon\cdot\mu\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}=0. \qquad (10.25)$$

Ecuaţiile (10.24) şi (10.25) au structura matematică a ecuaţiei

adnotaţii……

$$\Delta\psi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0 \qquad (10.26)$$

care reprezintă ecuaţia diferenţială a undelor.

Astfel din ecuaţiile lui Maxwell rezultă că atât câmpul electric cât şi câmpul magnetic nu sunt localizate în spaţiu ci se propagă sub forma unor unde cu aceeaşi viteză $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$. Aşadar, cele două unde se propagă simultan în spaţiu, coexistând în fiecare punct din spaţiu şi reprezintă unda electromagnetică. Altfel spus, câmpul electromagnetic se propagă din aproape în aproape sub formă de unde electromagnetice, cu o viteză de propagare dată de expresia

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \qquad (10.27)$$

Pentru vid viteza de propagare a undelor electromagnetice are valoarea $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = 2,99793 \cdot 10^8\, m/s$, adică este uimitor de apropiată de viteza de propagare a luminii în vid, fapt care l-a făcut pe Maxwell să emită ipoteza curajoasă (confirmată ulterior) că lumina nu este altceva decât o oscilaţie (undă) electromagnetică care se propagă în diferite medii.

La propagarea luminii prin medii dispersive transparente, viteza acesteia este mai mică decât în vid şi are expresia

$$v = \frac{c}{n}, \qquad (10.28)$$

unde n reprezintă indicele de refracţie al mediului. Pentru un mediu transparent cu $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$ şi $\mu = \mu_0\mu_r \approx \mu_0$. Se găseşte

$$n^2 = \varepsilon_r \qquad (10.29)$$

Experimental se constată că pentru un anumit domeniu de frecvenţe $\varepsilon_r = \varepsilon_r(\upsilon)$ şi deci indicele de refracţie este funcţie de frecvenţă.

adnotaţii……

11. UNDE ELECTROMAGNETICE

11.1 Oscilaţii şi unde electromagnetice

Oscilaţii ale câmpului electric şi magnetic pot fi obţinute prin descărcarea unui condensator C într-un circuit cu o bobină L, numit circuit oscilant (figura 11.1*a*).

Oscilaţiile câmpului electric (în condensator) şi ale câmpului magnetic (în bobină) sunt amortizate datorită efectului Joule din rezistenţa circuitului.

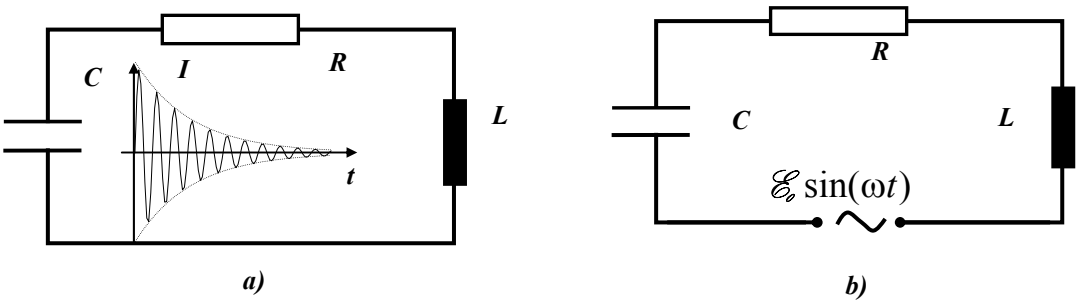


Figura 11.1

Oscilaţiile se pot întreţine dacă se introduce în circuit o sursă cu tensiune electromotoare periodică ($\mathscr{E}\sin\omega t$). Amplitudinea acestor oscilaţii este maximă atunci când frecvenţa sursei de tensiune este egală cu frecvenţa proprie

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

a circuitului oscilant (figura 11.1*b*).

Circuitele oscilante de frecvenţă înaltă creează câmpuri electromagnetice care se propagă în spaţiu, deci sunt surse de câmpuri electromagnetice. Energia câmpului electromagnetic creat, pe această cale, în mediul exterior, este mică, câmpul magnetic fiind conţinut aproape numai în interiorul bobinei, iar câmpul electric, practic, numai în dielectricul dintre armăturile condensatorului. Dacă se depărtează, însă, armăturile condensatorului, una faţă de cealaltă, astfel încât acesta să poată fi considerat ca un *dipol oscilant*, energia disipată sub formă de unde electromagnetice devine importantă.

La o distanţă destul de mare în raport cu dimensiunile sale, dipolul oscilant poate fi considerat punctual, câmpul electromagnetic în propagare

adnotaţii……

corespunzându-i, deci, suprafeţe de undă sferice cu centrul într-un punct situat în centrul (mijlocul) dipolului. La distanţe foarte mari de dipol, suprafeţele de undă sferice devin suprafeţe de undă plane, perpendiculare pe direcţia de propagare a câmpului electromagnetic. În acest caz, la orice moment, vectorii câmpului au aceeaşi valoare în toate punctele oricărui plan perpendicular pe direcţia de propagare a undei. Dacă se alege axa Ox drept direcţie de propagare, atunci $\vec{E}$ şi $\vec{H}$ trebuie să depindă numai de variabilele x şi t. Soluţiile sub formă de undă plană a ecuaţiilor undelor au forma

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_0 \sin\left(\omega t - kx\right) \\ \vec{H} &= \vec{H}_0 \sin\left(\omega t - kx\right) \end{aligned}, \tag{11.1}$$

unde $k = 2\pi / \lambda$ este numărul de undă, $\omega = 2\pi\nu / \lambda = kv$, iar ν este viteza undei.

Sub formă complexă, aceste unde plane se scriu

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_0 e^{i\cdot(\omega t - kx)} \\ \vec{H} &= \vec{H}_0 e^{i\cdot(\omega t - kx)} \end{aligned}, \tag{11.2}$$

iar operatorul ∇ se reduce la expresia

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} = -\left(ik\right)\vec{i}\,. \tag{11.3}$$

Dacă direcţia de propagare nu este Ox, ci o direcţie oarecare de versor $\vec{n}$, se înlocuieşte $\vec{i}$ cu $\vec{n}$ şi (11.3) devine

$$\nabla = -\left(ik\right)\vec{n}\,. \tag{11.4}$$

Pe baza acestei relaţii, ecuaţiile lui Maxwell, $\operatorname{div}\vec{B} = 0$ şi $\operatorname{div}\vec{D} = \rho$, devin

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\vec{D} &= -ik\varepsilon\vec{n}\cdot\vec{E} = 0 \\ \nabla\cdot\vec{B} &= -ik\mu\vec{n}\cdot\vec{H} = 0 \end{aligned}. \tag{11.5}$$

Din (11.5) rezultă că vectorii $\vec{E}$ şi $\vec{H}$ sunt perpendiculari pe $\vec{n}$, adică pe direcţia de propagare a undei.

adnotaţii……

O altă proprietate importantă a undelor electromagnetice este aceea că vectorii $\vec{E}$ şi $\vec{H}$ sunt perpendiculari între ei şi deci, împreună cu $\vec{n}$ alcătuiesc un triedru drept (figura 11.2).

Un burghiu drept rotit de la vectorul $\vec{E}$ spre vectorul $\vec{H}$ pe drumul cel mai scurt va înainta în sensul lui $\vec{n}$. Pentru a demonstra acest lucru vom face

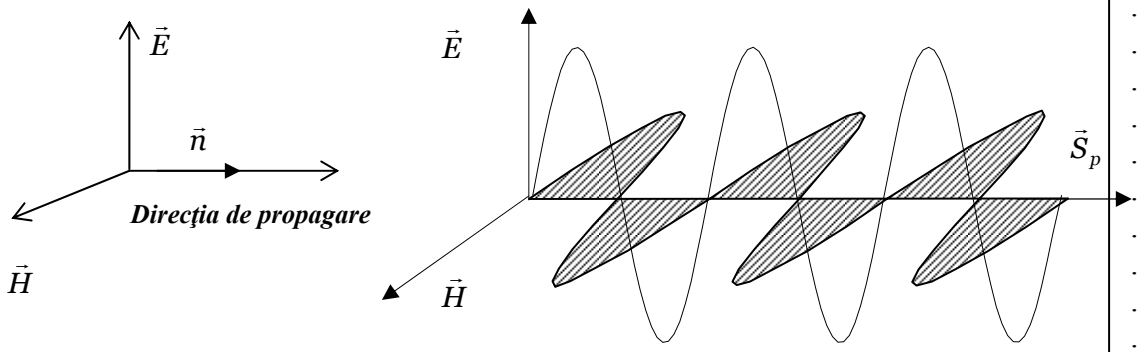


Figura 11.2

derivata în raport cu timpul a vectorului inducţie magnetică ţinând seama de expresia acestuia (11.2) ca soluţie sub formă de undă plană.

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \mu \vec{H}_0 i\omega e^{i\cdot(\omega t - kx)} = \mu i\omega \vec{H} \,. \qquad (11.6)$$

Analog, se obţine

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon i\omega \vec{E} \,. \qquad (11.7)$$

Din grupul ecuaţiilor lui maxwell deducem:

$$\begin{aligned} -ik\vec{n} \times \vec{E} &= -\mu i\omega \vec{H} \\ -ik\vec{n} \times \vec{H} &= \varepsilon i\omega \vec{E} \end{aligned} \,. \qquad (11.8)$$

Deoarece $\omega = 2\pi / T = 2\pi\nu / \lambda = kv$, obţinem

$$\vec{n} \times \vec{E} = \mu v \vec{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \vec{H}, \; -\left(\vec{n} \times \vec{H}\right) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \vec{E} \,. \qquad (11.9)$$

Din (11.9) rezultă că vectorii $\vec{E}$ şi $\vec{H}$ sunt perpendiculari $\left(\vec{E} \perp \vec{H}\right)$ precum şi faptul că $\vec{E}$, $\vec{H}$ şi $\vec{n}$ alcătuiesc un triedru drept (figura 11.2).

De asemenea, deoarece $\left|\vec{n} \times \vec{E}\right| = 1 \cdot E \cdot \sin(90^0) = E$ şi $\left|\vec{n} \times \vec{H}\right| = H$, rezultă că raportul

adnotaţii……

$$\frac{E}{H}=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \qquad (11.10)$$

este independent de timp; aceasta demonstrează că vectorii $\vec{E}$ şi $\vec{H}$ au aceeaşi fază şi variază sincron.

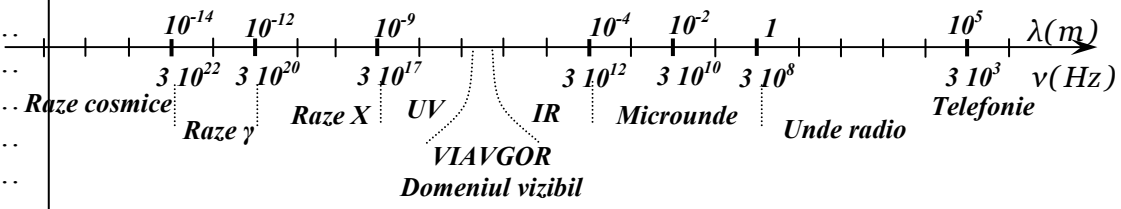


Figura 11.3

Undele electromagnetice, reprezentând fenomenul de propagare al câmpului electromagnetic, posedă energie. Energia undelor (câmpului) electromagnetice $\mathrm{d}W$ într-un element de volum $\mathrm{d}V$, reprezintă suma dintre energia câmpului electric al câmpului electromagnetic $\left(\varepsilon_0 E^2\,\mathrm{d}V/2\right)$ şi energia câmpului magnetic corespunzător $\left(\mu_0 H^2\,\mathrm{d}V/2\right)$

$$\mathrm{d}W=\frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2+\mu_0 H^2\right)\mathrm{d}V\,. \qquad (11.11)$$

Densitatea de energie a câmpului electromagnetic este

$$\overline{w}=\frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2+\mu_0 H^2\right)=\frac{1}{2}\left(E\cdot D+H\cdot B\right). \qquad (11.12)$$

Energia care trece prin unitatea de arie în unitatea de timp, adică *intensitatea undei electromagnetice*, este

$$I=\frac{1}{\mathrm{d}S}\frac{\partial W}{\partial t}=\frac{1}{\mathrm{d}S}\frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{w}\,\mathrm{d}V\right)=v\overline{w}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\mu H^2=$$
$$=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}H^2=E\cdot H=\left|\vec{E}\times\vec{H}\right|=\left|\vec{S}_p\right|. \qquad (11.13)$$

Vectorul $\vec{E}\times\vec{H}=\vec{S}_p$ poartă numele de vectorul lui Poynting şi este orientat în sensul vitezei de propagare a undei electromagnetice (figura 11.2).

Undele electromagnetice au o gamă foarte largă de lungimi de undă (frecvenţe). În figura 11.3 este dat spectrul undelor electromagnetice şi denumirea specifică căpătată de fiecare (domeniile nu sunt reprezentate la scară).

adnotaţii……

11.2 Polarizarea undelor electromagnetice

11.2.1 Starea de polarizare a undelor electromagnetice

Fenomenele de interferenţă şi de difracţie se pot produce cu orice fel de unde, cum ar fi undele sonore sau undele formate la suprafaţa unui lichid. Lumina (radiaţie electromagnetică) are şi caracteristici care nu pot fi puse în evidenţă cu ochiul liber. În continuare vor fi studiate fenomenele care depind direct de caracterul *transversal* al undelor electromagnetice.

Acea caracteristică a luminii la care ochiul nu este sensibil, dar pentru care

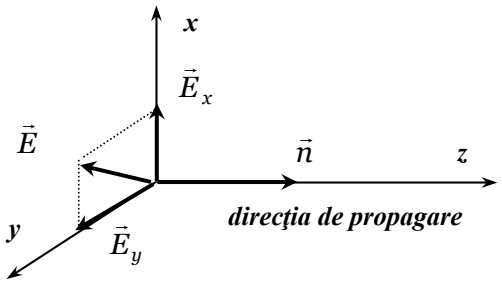


Figura 11.4

există elemente optice sensibile, este cunoscut sub numele de *polarizare* (stare de polarizare). Această caracteristică produce fenomene optice care pot fi observate numai la undele transversale şi nu pot fi reproduse de undele sonore longitudinale.

Oricare undă electromagnetică poate fi considerată ca o suprapunere de unde electromagnetice plane armonice.

Se consideră o undă electromagnetică plană armonică pentru care $\vec{E}$ şi $\vec{H}$ au forma

$$A\cos\left(\tau+\delta\right), \tag{11.14}$$

cu

$$\tau=\omega t-\vec{k}\vec{r}=\omega\left(t-\frac{\vec{r}\vec{n}}{v}\right). \tag{11.15}$$

adnotaţii……

Alegând (figura 11.4) axa Oz paralelă cu direcţia $\vec{n}$ atunci, deoarece undele electromagnetice sunt transversale, numai componentele după axele Ox şi Oy ale lui $\vec{E}$ şi $\vec{H}$ sunt nenule.

Se studiază natura curbei (locul geometric) care este descrisă de vârful vectorului intensităţii câmpului electric ca punct tipic în spaţiu. Această curbă este locul punctelor ale căror coordonate sunt:

$$E_x = E_{0x}\cos\left(\tau+\delta_x\right) = R_e E_{ox} e^{i(\tau+\delta_x)}, \qquad (11.16)$$

$$E_y = E_{0y}\cos\left(\tau+\delta_y\right) = R_e E_{oy} e^{i(\tau+\delta_y)}. \qquad (11.17)$$

Astfel rezultă

$$\frac{E_x}{E_{0x}} = \cos\tau\cos\delta_x - \sin\tau\sin\delta_x, \qquad (11.18)$$

$$\frac{E_y}{E_{0y}} = \cos\tau\cos\delta_y - \sin\tau\sin\delta_y. \qquad (11.19)$$

Înmulţind pe (11.18) cu $\sin\delta_y$ şi pe (11.19) cu $-\sin\delta_x$ şi adunând rezultatele, se obţine

$$\frac{E_x}{E_{0x}}\sin\delta_y - \frac{E_y}{E_{0y}}\sin\delta_x = \cos\tau\sin\left(\delta_y-\delta_x\right). \qquad (11.20)$$

Înmulţind pe (11.18) cu $\cos\delta_y$ şi pe (11.19) cu $-\cos\delta_x$ şi adunând rezultatele, se obţine

$$\frac{E_x}{E_{0x}}\cos\delta_y - \frac{E_y}{E_{0y}}\cos\delta_x = \sin\tau\sin\left(\delta_y-\delta_x\right). \qquad (11.21)$$

Ridicând pe (11.20) şi pe (11.21) la pătrat şi adunându-le se obţine

$$\frac{E_x^2}{E_{0x}^2} + \frac{E_y^2}{E_{0y}^2} - 2\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)\cos\left(\delta_y-\delta_x\right) = \sin^2\left(\delta_y-\delta_x\right). \qquad (11.22)$$

Deoarece $\vec{n}\times\vec{E} = \sqrt{\mu/\varepsilon}\,\vec{H}$, ţinând seama şi de figura 11.4 se obţine

$$H_x = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_y = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_{0y}\cos\left(\tau+\delta_y\right), \qquad (11.23)$$

$$H_y = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_x = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_{0x}\cos\left(\tau+\delta_x\right). \qquad (11.24)$$

adnotaţii……

Prin urmare vârful vectorului intensitate a câmpului magnetic $\vec{H}$ descrie o elipsă într-un dreptunghi ale cărui laturi sunt paralele la direcţiile Ox şi Oy şi ale cărui lungimi sunt $2\sqrt{\varepsilon/\mu}E_{0y}$ şi respectiv $2\sqrt{\varepsilon/\mu}E_{0x}$.

Analizând (11.22) se observă următoarele cazuri particulare

a) dacă $\delta = \delta_y - \delta_x = m\pi/2$; $m = \pm 1, \pm 3, \ldots$ atunci (11.22) devine

$$\frac{E_x^2}{E_{Ox}^2} + \frac{E_y^2}{E_{Oy}^2} = 1, \qquad (11.25)$$

deci unda este polarizată eliptic (figura 11.5);

b) dacă

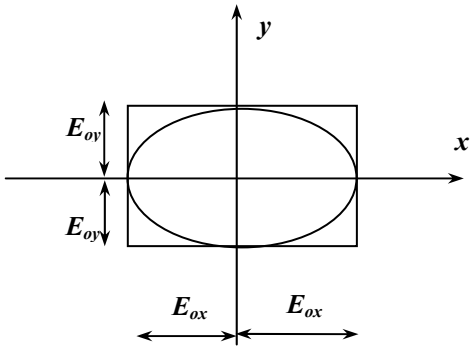


Figura 11.5

$$E_{Ox} = E_{Oy} = E_0 \text{ şi } \delta = \delta_y - \delta_x = m\frac{\pi}{2};\ m = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots \qquad (11.26)$$

atunci

$$E_x^2 + E_y^2 = E_0^2, \qquad (11.27)$$

adică unda electromagnetică este *circular polarizată*;

c) dacă $\delta = \delta_y - \delta_x = m\pi$ $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ elipsa (11.22) se reduce la o dreaptă,

$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}} - \frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 = 0 \text{ sau } E_y = \frac{E_{0y}}{E_{0x}} \cdot E_x, \qquad (11.28)$$

deci $\vec{E}$ *este liniar polarizat*.

În analiza efectuată până aici s-a studiat în special vectorul $\vec{E}$ deoarece senzaţia de lumină este dată de câmpul electric, caracterizat prin vectorul $\vec{E}$, numit şi "*vector luminos*".

adnotaţii……

La trecerea atomului dintr-o stare energetică în alta, emisia luminii are loc sub formă de tren de unde. Fiecare undă elementară este *polarizată*, adică oscilaţiile vectorului electric se fac într-un singur plan în timpul propagării. Dar direcţiile de polarizare a diferitelor unde elementare sunt oarecare şi independente între ele. Ca urmare, unda electromagnetică nu are un anumit

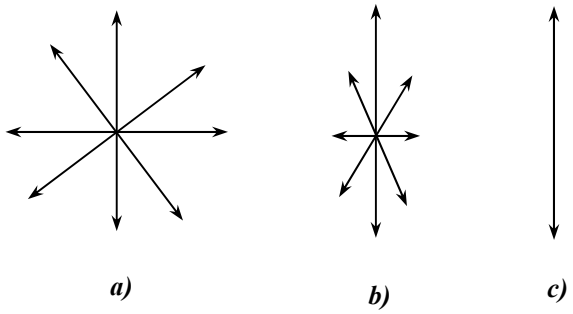


Figura 11.6

plan de oscilaţie, fiind posibile oscilaţii perpendiculare pe direcţia de propagare, în toate direcţiile (figura 11.6*a*).

Astfel, nu există o direcţie privilegiată de oscilaţie şi se spune că lumina naturală nu este polarizată. Dacă oscilaţiile vectorului electric al unei unde luminoase se fac într-un singur plan, formula (11.28), se spune că unda este *polarizată liniar* (figura 11.6*c*). Planul în care oscilează vectorul electric se numeşte *plan de oscilaţie*, iar planul perpendicular pe planul de oscilaţie se numeşte *plan de polarizare*.

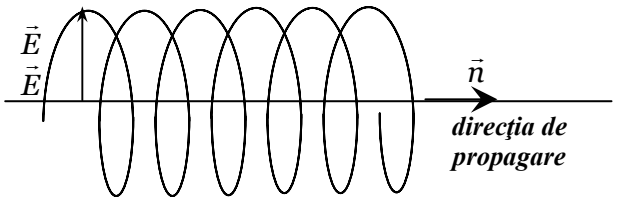


Figura 11.7

Este posibil ca la o rază de lumină, oscilaţiile vectorului electric să se facă de preferinţă într-un plan fiind însă posibile şi oscilaţii în alte plane. În acest caz se spune că unda este *parţial polarizată* (figura 11.6*b*).

În afară de lumina polarizată liniar s-a arătat că există şi lumină polarizată eliptic, expresia (11.25), la care vectorul electric $\vec{E}$ descrie o elipsă într-un plan perpendicular pe direcţia de propagare ce se deplasează odată cu unda (figura 11.7).

adnotaţii……

Dacă rotirea se face spre dreapta avem polarizare *dextrogiră* iar în caz contrar, *levogiră*. Polarizarea eliptică poate fi deci interpretată ca superpoziţia a două unde polarizate liniar după Ox respectiv Oy şi defazate.

Un caz particular îl constituie lumina polarizată circular.

Un dispozitiv care permite transformarea luminii naturale (nepolarizată) în lumină polarizată (liniar, eliptic sau circular) se numeşte *polarizor*. Analiza luminii polarizate se face cu un *analizor*.

Lumina poate fi polarizată prin trei mijloace: reflexie, refracţie şi dublă

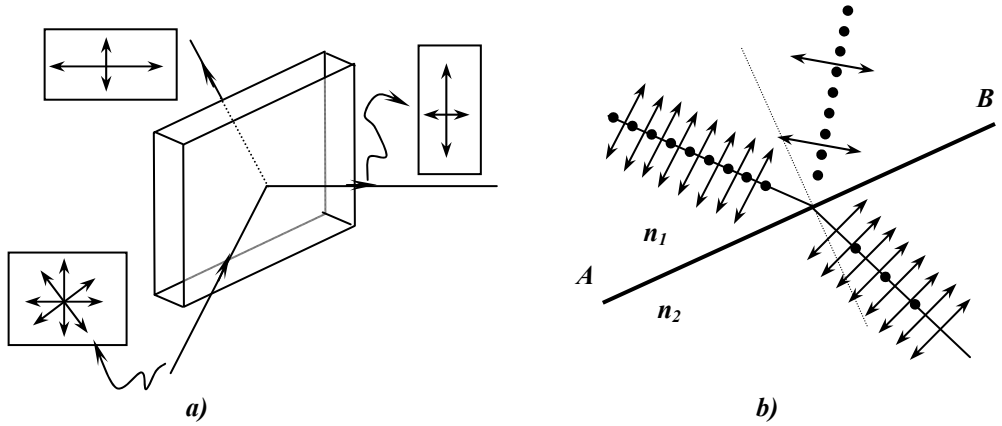


Figura 11.8

refracţie (sau birefringentă).

În figura 11.8 este reprezentat fenomenul de polarizare prin reflexie şi refracţie. Atunci când lumina naturală cade pe o suprafaţă reflectoare, s-a constatat că există o reflexie preferenţială a acelor unde în care vectorul electric este perpendicular pe planul de incidenţă. Pentru un anumit unghi de incidenţă, cunoscut sub numele de unghi de polarizare, i_p, nu se reflectă decât lumina al cărei vector electric este perpendicular pe planul de incidenţă; deci în acest caz raza reflectată va fi total polarizată. În acest caz se mai constată că raza reflectată şi cea refractată sunt perpendiculare una pe cealaltă iar unghiul de refracţie r_p devine complementul lui i_p, astfel se obţine succesiv $\sin r_p = \cos i_p$, $n_1 \sin i_p = n_2 \sin r_p$ şi $n_1 \sin i_p = n_2 \cos i_p$ de unde expresia

$$\operatorname{tg} i_p = \frac{n_2}{n_1}, \qquad (11.29)$$

cunoscută sub numele de *legea lui Brewster*.

adnotaţii……

11.2.2 Propagarea undelor electromagnetice în medii anizotrope

Propagarea unui tren de unde printr-un mediu omogen şi izotrop, cum este sticla, se face prin unde sferice. Există însă multe substanţe cristaline transparente care, deşi omogene, sunt *anizotrope*.

În aceste cristale, viteza undei luminoase nu este aceeaşi în toate direcţiile. Cristalele care au această proprietate se numesc dublu refractante sau *birefringente*. Într-un astfel de cristal, de pe fiecare suprafaţă de undă incidentă se propagă două seturi de unde secundare, unele fiind sferice iar celelalte elipsoidale. Cele două seturi sunt tangente unul altuia în lungul unei direcţii numită *axă optică* a cristalului. Pe direcţia axei optice cele două viteze sunt egale.

Dacă dintr-un asemenea cristal se taie o lamă subţire ale cărei feţe fac un unghi oarecare cu axa optică, pentru orice rază incidentă a cărei direcţie nu coincide cu direcţia axei optice vor rezulta două raze refractate din care una trece prin

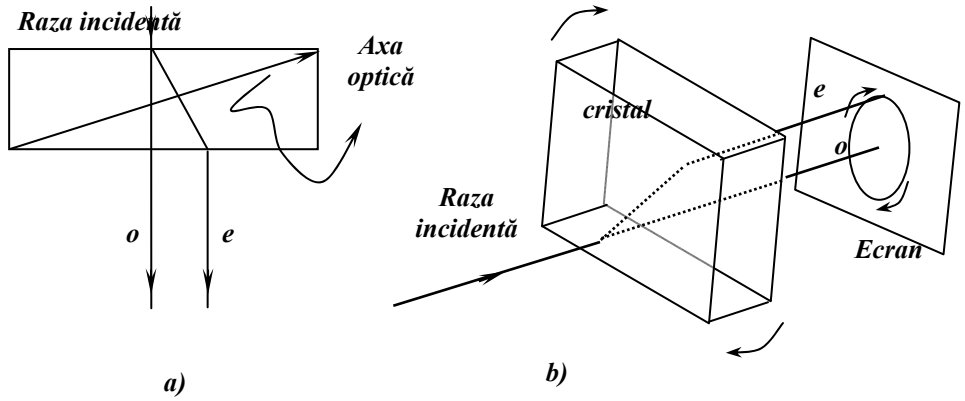


Figura 11.9

lamelă fără a fi deviată, deci respectând legile refracţiei, numită *rază ordinară* (o) iar cea de-a doua fiind deviată, deci nerespectând legile refracţiei, numită *rază extraordinară* (e) (figura 11.9).

Se consideră o lamelă din spat de Islanda $\left(CaCO_3\right)$, tăiată conform figurii 11.10, pe a cărei faţă AB, sub o anumită incidenţă i, cade o rază de lumină naturală, deci nepolarizată.

adnotaţii……

Datorită birefringenţei lamelei, raza incidentă va produce două raze refractate: ordinară I_o şi extraordinară I_e, care la ieşirea din lamelă întâlnesc o oglindă de sticlă pe care cad în incidenţă brewsteriană, reflectându-se pe oglindă. Rotind oglinda cu 360^0 în jurul razelor incidente I_o şi I_e se constată că intensitatea luminii la spoturile formate în M şi N trece, pentru fiecare din cele două raze, de câte două ori prin valori maxime şi minime şi că maximului de intensitate a razei ordinare îi corespunde o intensitate zero pentru raza extraordinară şi invers. Aceasta arată că cele două raze, ordinară şi extraordinară, ce apar datorită birefringenţei lamelei, sunt raze de lumină polarizate total şi vibraţiile acestora au loc în plane perpendiculare. Rezultă că orice rază de lumină naturală (deci nepolarizată) ce pătrunde într-un cristal birefringent, după o altă direcţie decât axa optică, este descompusă în două raze polarizate total, având planele de polarizare perpendiculare între ele.

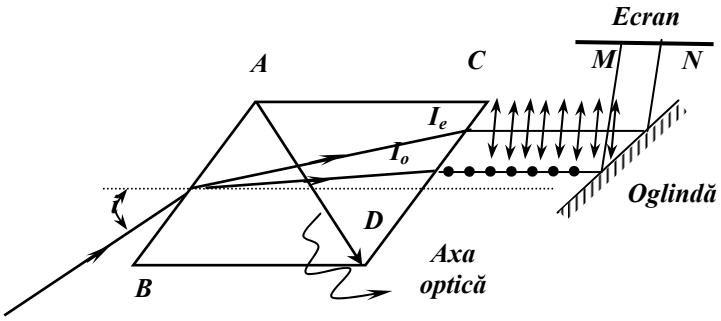


Figura 11.10

Deşi lumina polarizată total, obţinută prin birefringenţă, prezintă avantaje remarcabile faţă de cea obţinută prin reflexie şi refracţie, în sensul că la polarizarea prin birefringenţă ambele raze, ordinară şi extraordinară, sunt polarizate total şi că întreaga energie a fasciculului incident se regăseşte în cele două fascicule polarizate total, totuşi, din cauza divergenţei mici dintre cele două raze, posibilitatea utilizării lor în acelaşi timp este dificilă. Pentru obţinerea luminii polarizate liniar au fost concepute mai multe dispozitive speciale care poartă numele celor care le-au conceput: prisma Nicol (simplu nicol), prisma Wollaston, prisma Rochan etc. Astfel un nicol (figura 11.11) se

adnotaţii……

obţine din două lamele (prisme) din spat de Islanda ($n_0 = 1,66$ şi $n_e = 1,48$) lipite între ele cu balsam de Canada ($n_b = 1,54$).

Deoarece $n_0 > n_b$ raza ordinară va fi reflectată total de stratul de balsam de Canada, deci nu va traversa nicolul.

Unele cristale birefringente uniaxe au proprietatea de a absorbi raza ordinară, lăsând să treacă numai raza extraordinară. Acest efect numit dicroism apare în special la cristalele de iodosulfat de chinină. Dacă se introduc aceste cristale de

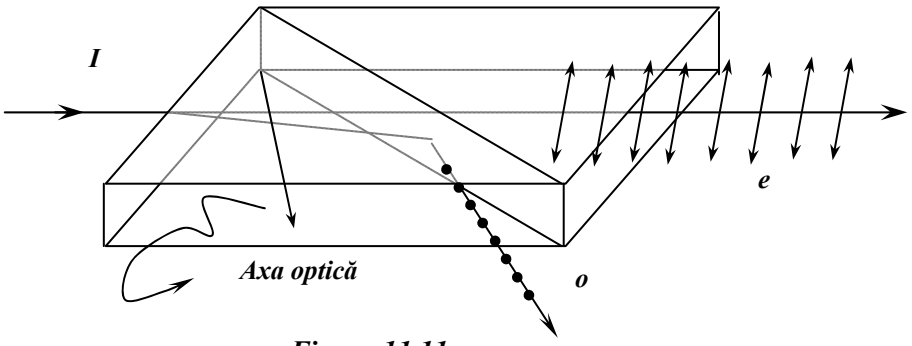


Figura 11.11

dimensiuni foarte mici într-o soluţie lichidă transparentă (nitroceluloză de exemplu) şi în procesul de solidificare sunt supuse acţiunii unui câmp electric intens, care orientează toate cristalele mici cu axa optică pe direcţia câmpului electric, se obţin lamele, numite *polarizori*, cu remarcabile proprietăţi birefringente dicroice, care pot fi făcute de dimensiuni mari, deci permit folosirea unor fascicule de lumină largi.

11.2.3 Birefringenţa provocată

Unele substanţe, care în condiţii normale sunt izotrope pot devenii anizotrope dacă asupra lor acţionează anumiţi factori externi cum ar fi: câmpuri electrice, câmpuri magnetice, acţiuni mecanice. Această anizotropie căpătată sub acţiunea unor factori externi poartă numele de *birefringenţă provocată.*

11.2.4 Efectul Kerr

Efectul Kerr constă în apariţia birefringenţei la unele substanţe supuse acţiunii unui câmp electric intens. Pentru a pune în evidenţă acest efect se realizează montajul experimental din figura 11.12 în care polarizorul P şi analizorul A

adnotaţii……

sunt la extincţie. Între polarizor şi analizor se află o cuvă cu un dielectric lichid (nitrobenzen, bisulfit de carbon) care umple spaţiul dintre armăturile unui condensator plan.

Cuva care conţine condensatorul şi dielectricul poarta numele de celula Kerr. În lipsa câmpului electric lumina este obturată deoarece polarizorul şi analizorul sunt la extincţie.

Alimentând condensatorul la o tensiune continuă, asupra dielectricului lichid acţionează câmpul electric care orientează dipolii moleculari ai dielectricului pe direcţia câmpului. În acest fel în dielectric este indusă o axă optică conferind acestuia proprietăţi birefringente. Lumina care îl părăseşte este eliptic polarizată şi părăseşte doar parţial analizorul (componenta care este paralela cu axa analizorului). Deci, în lipsa câmpului electric prin montajul polarizor –

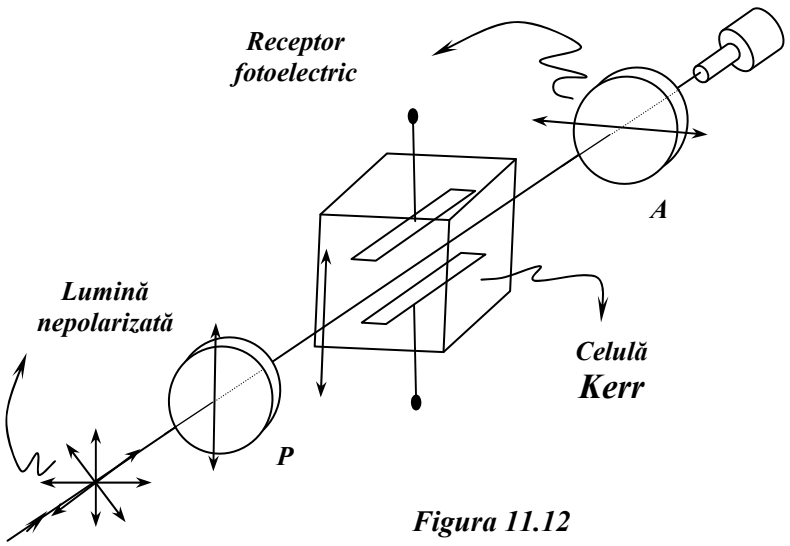


Figura 11.12

celulă Kerr - analizor nu trece lumina (P şi A la extincţie) iar la aplicarea câmpului electric receptorul fotoelectric indică trecerea luminii prin acelaşi montaj.

Gradul de birefringentă provocat de *efectul* Kerr descris mai sus este dat de relaţia

$$n_e - n_0 = B\lambda E^2, \qquad (11.30)$$

unde n_e si n_0 sunt indicii de refracţie pentru raza extraordinară şi ordinară, B este constanta Kerr, (depinde de natura substanţei) λ este lungimea de undă a radiaţiei utilizate, iar E este intensitatea câmpului electric dintre armaturile

adnotaţii……

condensatorului. Există şi un efect Kerr magneto-optic care constă în modificarea stării de polarizare a luminii când se reflectă la incidenţă aproximativ normală pe suprafaţa metalelor magnetice.

Lumina reflectată devine eliptic polarizată şi acest fapt este datorat vectorului câmp magnetic care induce un nou vector câmp electric la un unghi drept faţă de vectorul electric care există fără magnetizare. Dacă aceşti doi vectori sunt în fază, ei se combină cu fascicolul reflectat dând naştere unui nou vector pentru care planul de rotaţie apare rotit.

11.2.5 Efectul Cotton - Moutton

Efectul Cotton - Moutton constă în apariţia birefringenţei la unele substanţe izotrope supuse acţiunii unui câmp magnetic.

Pentru a pune în evidenţă acest efect se realizează un montaj asemănător cu cel prezentat la efectul Kerr (figura 11.12) dar substanţa este introdusă intr-un câmp magnetic. În acest caz anizotropia apare datorită orientării dipolilor magnetici moleculari pe direcţia câmpului. Gradul de birefringenţă este dat de relaţia:

$$n_e - n_0 = C\lambda H^2$$

unde C este o constantă ce depinde de natura materialului, λ este lungimea de undă a radiaţiei utilizate, iar H este intensitatea câmpului magnetic.

11.2.6 Efectul Faraday

Efectul Faraday apare la propagarea luminii plan polarizate de-a lungul unui câmp magnetic aplicat unui mediu izotop şi constă în rotirea planului de polarizare a luminii.

Studiul efectului Faraday se poate face cu montajul din figura 11.12 în care celula Kerr este înlocuită cu substanţa de studiat introdusă într-un câmp magnetic a cărui direcţie să fie cat mai apropiată de direcţia de propagare a luminii pentru ca efectul să fie maxim.

Unghiul de rotire al planului de polarizare prin efect Faraday (polarizarea rotatorie magnetica) este dat de relaţia

$$\varphi = VlB\cos\alpha, \qquad (11.31)$$

unde V este constanta lui Verdet (depinde de lungimea de undă a radiaţiei), l este lungimea drumului parcurs de lumină în substanţă, B este inducţia câmpului magnetic iar α este unghiul dintre fascicolul luminos şi liniile câmpului magnetic .Deci unele substanţe din natură, numite optic active, pot roti planul de polarizare a luminii. Substanţele care nu prezintă această proprietate pot însă să o capete sub influenţa unui câmp magnetic longitudinal.

11.2.7 Alte efecte de birefringentă provocată

Birefringenta mecanică apare atunci când o substanţă izotropă transparentă este supusă unei tensiuni mecanice.

Dacă o rază de lumină liniar polarizată trece printr-o lamelă transparentă izotropă situată între un polarizor şi un analizor cu axele perpendiculare (la extincţie) atunci câmpul analizorului este întunecat. Dacă lamela e supusă unei tensiuni mecanice P atunci câmpul analizorului se luminează datorită transformării luminii polarizate liniar în lumină polarizată eliptic ca rezultat al birefringenţei mecanice.

Gradul de birefringenţă este dat de relaţia

$$n_e - n_0 = C\lambda P \qquad (11.32)$$

unde C este o constantă ce depinde de natura materialului supus tensiunii mecanice.

11.2.8 Efectul Pockels

Efectul Pockels constă în apariţia unor modificări ale indicilor de refracţie ai cristalelor transparente piezoelectrice la aplicarea unui câmp electric pe cristal, variaţiile fiind liniare cu câmpul aplicat.

11.3 Fenomene produse de undele electromagnetice

În prezentul paragraf vor fi prezentate pe scurt câteva din fenomenele produse de undele electromagnetice din domeniul vizibil (lumina) care fac obiectul de studiu al opticii. Lumina se reflectă, se refractă, este absorbită sau împrăştiată

adnotaţii……

adnotaţii……

de substanţă, produce fenomene de interferenţă, difracţie, dispersie şi polarizare.

11.3.1 Interferenţa luminii

Fenomenul de inter-ferenţă apare la suprapunerea undelor coerente şi se manifestă prin prezenţa unor maxime şi minime numite franje de interferenţă. Deoarece senzaţia de lumină este dată de componenta electrică a undei electromagnetice, în cele ce urmează se va lua în consideraţie doar vectorul intensitate a câmpului electric $\vec{E}$.

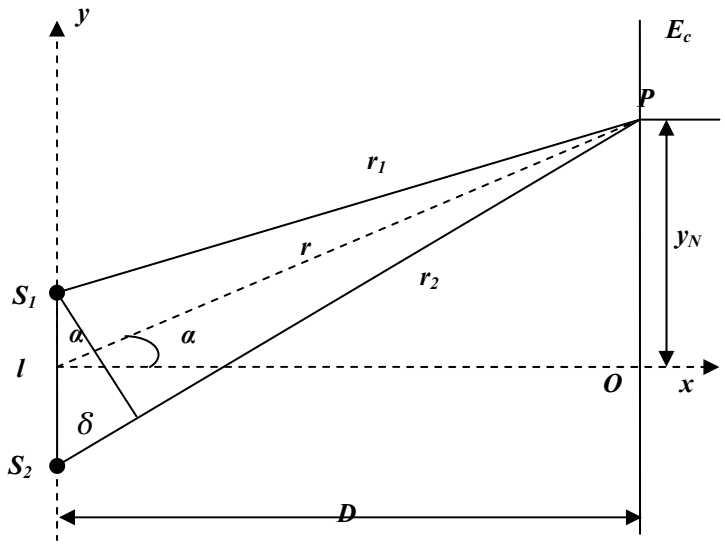


Figura 11.13

Fie două surse de lumină S_1 şi S_2 (figura 11.13) a căror oscilaţii ale vectorilor $\vec{E}$ sunt date de expresiile

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{01}\sin\left(\omega t + \varphi_1\right)$$
$$\vec{E}_2 = \vec{E}_{02}\sin\left(\omega t + \varphi_2\right). \qquad (11.33)$$

Fie un punct P, de pe ecranul E_c în care se suprapun cele două unde luminoase. Oscilaţiile în punctul P, provenite de la sursele de lumină S_1 şi S_2 sunt date de expresiile.

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{01}\sin\left(\omega t - kr_1 + \varphi_1\right), \qquad (11.34)$$
$$\vec{E}_2 = \vec{E}_{02}\sin\left(\omega t - kr_2 + \varphi_2\right),$$

adnotaţii……

unde k reprezintă numărul de undă

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Conform principiului superpoziţiei, câmpul rezultant ($\vec{E}$) în punctul P este

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{E}_0 \sin\left(\omega t + \varphi\right),$$

unde

$$E_0^2 = E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02}\cos\left[\left(\varphi_2 - \varphi_1\right) - k\left(r_2 - r_1\right)\right]. \quad (11.35)$$

Dacă $E_{01} = E_{02}$, $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$ şi folosind $\sin\alpha = \delta / l = \left(r_2 - r_1\right) / l$ obţinem

$$E_0 = 2E_{01}\cos\frac{\pi \mathrm{d} l}{\lambda}\sin\alpha. \quad (11.36)$$

Pentru intensitatea I a undei luminoase rezultante în punctul P, vezi şi expresiile (11.12) şi (11.13), din (11.35) se găseşte

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\left[\left(\varphi_2 - \varphi_1\right) - k\left(r_2 - r_1\right)\right]. \quad (11.37)$$

În expresia (11.37), termenii sumei au următoarea semnificaţie:

$I_1 \approx E_{01}^2$ reprezintă intensitatea undei provenite de la S_1

$I_2 \approx E_{02}^2$ reprezintă intensitatea undei provenite de la S_2

$2\sqrt{I_1 I_2}\cos\left[\left(\varphi_2 - \varphi_1\right) - k\left(r_2 - r_1\right)\right]$ este termenul de interferenţă.

Termenul de interferenţă caracterizează interacţiunea dintre undele care se compun.

Pentru ca în punctul P (caracterizat faţă de S_1 şi S_2 prin mărimile r_1 şi r_2) valoarea lui I să fie constantă trebuie ca $\varphi_2 - \varphi_1 = ct.$ adică sursele S_1 şi S_2 să fie coerente.

Mărimile r_1 şi r_2 numite drumuri optice sunt date de expresiile $r_1 = nr_{1g}$ şi $r_2 = nr_{2g}$ unde n este indicele de refracţie a mediului în care se propagă undele luminoase iar r_{1g} şi r_{2g} sunt drumurile geometrice urmate de unde, între surse şi punctul P unde interferă.

Din (11.37), pentru cazul particular $\varphi_2 - \varphi_1 = ct = 0$, se observă următoarele:

adnotaţii……

pentru $\delta = r_2 - r_1 = N\lambda$, cu $N = 0, 1, 2, ...$ $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} = I_{max}$, adică pentru diferenţe de drum egale cu un număr întreg de lungimi de undă, intensitatea rezultantă I este maximă;

pentru $\delta = r_2 - r_1 = (2N+1)\lambda/2$, adică diferenţa de drum este egală cu un număr impar de $\lambda/2$, intensitatea rezultantă $I = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} = I_{min}$ este minimă.

Dacă considerăm cazul particular $I_1 = I_2 = I_0$ atunci

$$I = 2I_0\left[1 + \cos k\delta\right] = 4I_0 \cdot \cos^2 \frac{k}{2}\delta = I_{max} \cdot \cos^2 \frac{k}{2}\delta \qquad (11.38)$$

iar intensitatea variază între valorile $I_{max} = 4I_0$ şi $I_{min} = 0$.

Maximele (I_{max}) şi minimele (I_{min}) de interferenţă se numesc *franje de interferenţă*.

Pentru unghiuri α mici, $\operatorname{tg}\alpha \cong \sin\alpha$ şi din figura 11.13 se găseşte

$$\frac{y_N}{D} = \frac{\delta}{l},$$

$$y_N = \frac{D}{l} \cdot \delta. \qquad (11.39)$$

Expresia (11.39) ne permite să calculăm poziţia pe ecran a maximelor şi minimelor de interferenţă.

Pentru maxime: $\delta = r_2 - r_1 = N\lambda$ şi

$$y_{N\,(max)} = \frac{D}{l} N\lambda. \qquad (11.40)$$

Pentru minime $\delta = r_2 - r_1 = (2N+1)\lambda/2$ şi

$$y_{N\,(min)} = \frac{D}{l}(2N+1)\frac{\lambda}{2}. \qquad (11.41)$$

Pentru $N = 0$, $r_2 = r_1$ şi avem de a face cu maximul central (de ordin zero) poziţionat în punctul O (figura 11.13).

Distanţa dintre două franje consecutive (interfranja) este dată de expresia

$$i = y_{N+1} - y_N = \frac{D}{l} \cdot \lambda. \qquad (11.42)$$

adnotaţii……

11.3.2 Difracţia luminii

Fenomenul de difracţie a luminii apare atunci când în calea undelor de lumină se interpun obstacole opace sau deschideri cu dimensiuni de ordinul de mărime al lungimii de undă a luminii. Fenomenul de difracţie se observă cu abateri de la optica geometrică ale cărei legi, dacă ar fi riguros satisfăcute, ar duce la delimitarea netă a domeniilor de "umbră" de domeniile "de lumină" dincolo de ecrane şi nu la obţinerea unei distribuţii complexe a intensităţii luminii.

Explicarea acestui fenomen precum şi a diferitelor sale proprietăţi se face pe baza principiului Huygens - Fresnel care afirmă că perturbaţia care se propagă în exteriorul unei suprafeţe închise ce conţine sursa de perturbaţie este identică cu cea care se obţine suprimând sursa şi înlocuind-o la un moment t prin surse convenabil repartizate pe toată suprafaţa închisă.

Se disting două cazuri particulare de difracţie: difracţia în lumină divergentă

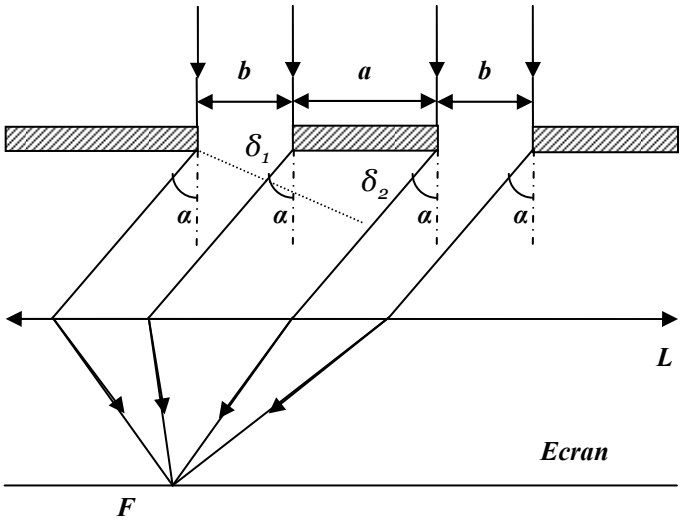


Figura 11.14

(difracţie Fresnel) şi difracţie în lumină paralelă (difracţie Fraunhoffer).

Vom prezenta pe scurt difracţia Fraunhoffer prin două fante liniare plane şi echidistante (figura 11.16). Fie ba lărgimea fantelor şi a lărgimea peretelui opac dintre ele.

Considerăm un fascicul paralel de lumină monocromatică care are incidenţa normală pe planul fantelor.

Se poate demonstra că amplitudinea oscilaţiilor vectorului luminos în planul focal al lentilei L este data de expresia

adnotaţii……

$$E_\alpha = E_0 \frac{\sin\left(\frac{\pi b}{\lambda}\cdot\sin\alpha\right)}{\frac{\pi b}{\lambda}\cdot\sin\alpha} \qquad (11.43)$$

unde E_0 este amplitudinea oscilaţiilor în planul fantelor.

Amplitudinea rezultantă în urma interferenţei undelor luminoase care provin de la cele două fante vecine este, vezi (11.36),

$$E_\varphi = \sqrt{E_\alpha^2 + E_\alpha^2 + 2E_\alpha^2\cdot\cos\varphi} = 2E_\alpha\cdot\cos\frac{\varphi}{2};\ \varphi = \frac{\pi(a+b)}{\lambda}\sin\alpha\,. \qquad (11.44)$$

Intensitatea undei luminoase în F este

$$I_\varphi = I_0\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi b}{\lambda}\right)}{\frac{\pi b}{\lambda}\cdot\sin\alpha}\right]^2\cdot\cos^2\left(\frac{\pi(a+b)}{\lambda}\cdot\sin\alpha\right). \qquad (11.45)$$

Imaginea de difracţie corespunzătoare lui (11.45) este reprezentată în figura 11.15. Curba punctată corespunde imaginii de difracţie pe o fantă, pentru care condiţia de maxim este:

$$\delta_1 = b\cdot\sin\alpha_1 = N\lambda\,. \qquad (11.46)$$

Această imagine modulează imaginea de interferenţă datorată fasciculelor provenită de la cele două fante (vezi şi figura 11.13) pentru care condiţia de maxim este

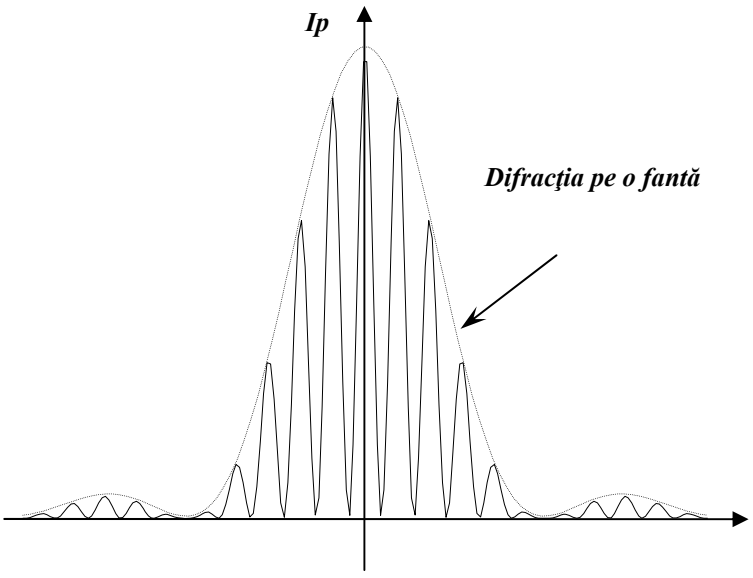


Figura 11.15

$$\delta_2 = (a+b)\cdot \sin\alpha_2 = N\lambda\,. \qquad (11.47)$$

Deoarece $a+b>b$, pentru acelaşi N, peste un maxim de difracţie se suprapun mai multe maxime şi minime de interferenţă.

În cazul utilizării unei reţele cu N_f fante plane paralele şi echidistante între poziţia franjelor luminoase principale se vor găsi $N_f - 1$ minime, franjele luminoase de acelaşi ordin dar de lungimi de undă diferite fiind separate între ele.

11.3.3 Absorbţia luminii

Absorbţia luminii este un proces de transfer a energiei undelor electromagnetice către substanţa în care se propagă. Energia transferată se regăseşte în substanţă sub formă de căldură.

Exprimarea formală a legilor absorbţiei luminii este aceeaşi pentru radiaţiile de orice frecvenţă din infraroşu, vizibil, ultraviolet, radiaţii X şi γ.

Fiecare strat subţire, de lungime $\mathrm{d}l$, din interiorul unei substanţe omogene absoarbe o fracţiune determinată $\mathrm{d}I$ din fluxul de lumină care-l străbate şi anume o fracţiune proporţională cu grosimea acelui strat (figura 11.16)

$$\mathrm{d}I = -kI\cdot \mathrm{d}l\,, \qquad (11.48)$$

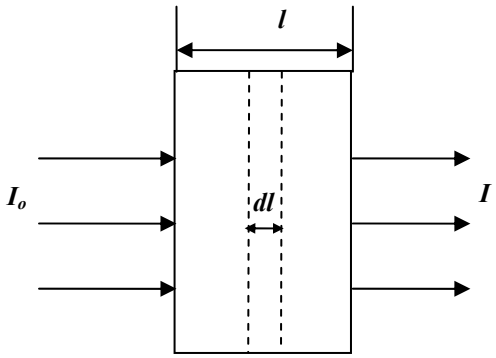


Figura 11.16

unde k poartă numele de coeficient de absorbţie.

Integrând (11.48) se găseşte

$$I = I_0\cdot e^{-kl}\,. \qquad (11.49)$$

Pentru medii gazoase rarefiate şi soluţii lichide diluate omogene, absorbţia este proporţională cu concentraţia c a moleculelor mediului respectiv

adnotaţii……

adnotaţii……

$$I = I_0 \cdot e^{-\varepsilon c l}, \qquad (11.50)$$

$\varepsilon = \varepsilon(\nu)$ poartă numele de coeficient de extincţie.

Expresia (11.50) este cunoscută şi sub numele de legea Bouguer-Lambert-Beer. Legea (11.50) arată că o undă electromagnetică se atenuează exponenţial atunci când străbate un mediu. Această atenuare este determinată de două fenomene:

absorbţia propriu-zisă care constă în conversia energiei undei în energie termică a particulelor substanţei;

împrăştierea sau difuzia undei pe particulele, impurităţile şi fluctuaţiile de concentraţie din substanţă. Deci

$$I = I_0 e^{-kl} = I_0 e^{-(k_a + k_i)l} \qquad (11.51)$$

unde k_a este coeficientul datorat absorbţiei iar k_f este coeficientul datorat împrăştierii.

11.3.4 Dispersia luminii

Fenomenul de dispersie a luminii apare la propagarea luminii în mediile dispersive adică în mediile în care viteza de propagare a luminii şi deci şi indicele de refracţie depinde de lungimea de undă λ.

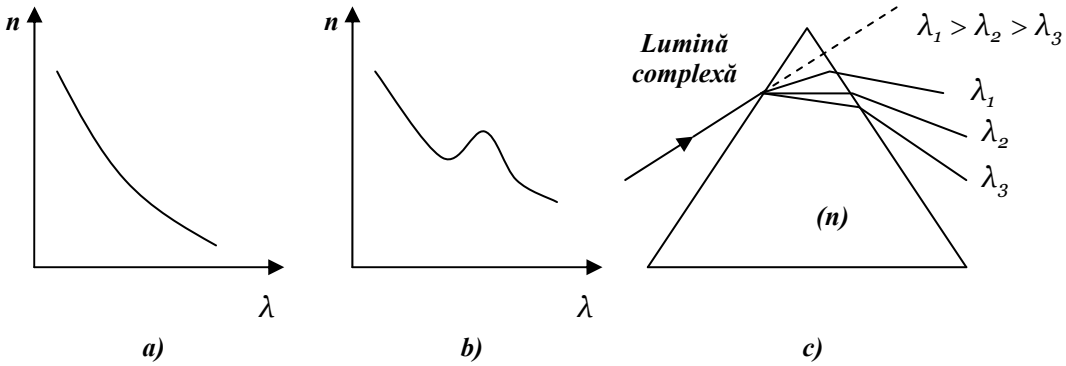


Figura 11.17

În mediile optice cu dispersie normală (figura 11.17*a*) indicele de refracţie este dat de expresia lui Cauchy

$$n^2 = A + \frac{B}{\lambda^2}, \qquad (11.52)$$

unde A şi B sunt constante care depind de natura mediului (substanţei) optic.

adnotaţii……

Există şi substanţe care prezintă fenomenul de dispersie "anomală"; la aceste substanţe dependenţa $n = n(\lambda)$ este reprezentată în figura 11.17*b*. În figura 11.17*c* este reprezentat fenomenul de dispersie a luminii într-o prismă optică.

12. PROBLEME. MODELE OPERAŢIONALE

1. Un conductor dreptunghiular se alfă în câmpul magnetic al curentului I=I0cosωt, care trece printr-un conductor liniar (figura 12.24). Care este t.e.m. indusă în conductorul dreptunghiular?

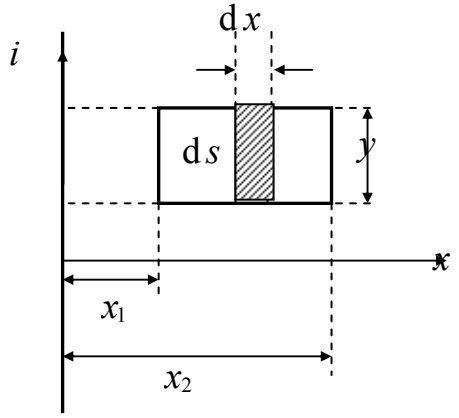


Figura 12.1

Rezolvare

Inducţia câmpului magnetic creat de curentul i la o distanţă x de conductorul rectiliniu este:

$$B = \mu_0 \frac{i}{2\pi x} = \mu_0 \frac{I}{2\pi x} \cos \omega t$$

Fluxul câmpului magnetic prin elementul de suprafaţă

$\mathrm{d}S = y \cdot \mathrm{d}x$ este: $\mathrm{d}\phi = B \cdot \mathrm{d}S$

Fluxul prin toată suprafaţa dreptunghiulară este

$$\phi = \mu_0 \frac{iy}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \mu_0 \frac{I_0 y}{2\pi} \ln \frac{x_2}{x_1} \cos \omega t$$

T.e.m. indusă în conductorul dreptunghiular este

$$\mathrm{E} = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mu_0 I_0 y}{2\pi} \omega \ln \frac{x_2}{x_1} \sin \omega t \,.$$

2. Un solenoid cu N=100 spire, lungimea l=10cm, raza spirei r=2cm are miezul cu permeabilitate $\mu_r = 2,5$. Solenoidul este parcurs de un curent electric care scade în timp după legea $i = 20e^{-5t} A$. Să se stabilească expresia t.e.m. autoindusă în solenoid.

Rezolvare

adnotaţii……

Inductanţa solenoidului este $L = \mu_0 \mu_r \frac{N^2 \pi r^2}{l}$, $L = 3{,}94 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{H}$

$$\mathrm{E} = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Li) = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 10^2 L e^{-5t} = 3{,}94 \cdot 10^{-2} e^{-5t}\,\mathrm{V}.$$

3. Un condensator plan format din două discuri de rază a şi aflate la distanţa h, este legat la o diferenţă de potenţial alternativă V. La frecvenţă mică, câmpul electric în fiecare moment este uniform, dat de:

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_0 \cdot e^{i\omega t}$$

a) Câmpul electric $\vec{E}_1$ fiind variabil, are asociat un câmp magnetic. Să se calculeze inducţia $\vec{B}_1$ a acestui câmp magnetic.

b) Câmpul magnetic variabil $\vec{B}_1$ are asociat un câmpul electric $\vec{E}_2$. Să se arate că acesta depinde de r. Câmpul electric dintre armături este: $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$.

c) Care este valoarea lui E2 pentru $r = 0$? Să se calculeze circulaţia lui E2 de-a lungul conturului Γ_2 şi să se deducă expresia lui $E_2(r)$.

d) Câmpul magnetic $\vec{B}_1$ nu este decât prima aproximaţie; trebuie ţinut seama şi de câmpul $\vec{B}_2$. Se poate scrie câmpul magnetic sub forma: $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$. Să se determine expresia lui $\vec{B}_2(r)$. Ce corecţie trebuie adusă câmpului magnetic pentru a dovedi existenţa câmpului magnetic $\vec{B}_2$?

Rezolvare

a) Ecuaţia lui Maxwell pentru câmpul electric variabil $\vec{E}_1$ *şi câmpul magnetic asociat* $\vec{B}_1$ *este:*

$$\nabla \times \vec{B}_1 = \varepsilon\mu_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t}.$$

Aplicând teorema lui Stokes şi ţinând seama de (10) rezultă:

$$\int_{\Gamma_1} \vec{B}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{\sum \Gamma_1} \nabla \times \vec{B}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int_{\sum \Gamma_1} \vec{E}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{A}.$$

Integrând (11), unde conturul este 2r iar suprafaţa închisă de acesta este πr^2*, se obţine:*

$$\vec{B}_1 = \frac{i\omega r}{2c^2} \cdot \vec{E}_0 \cdot e^{i\omega t}.$$

b) Câmpul magnetic $\vec{B}_1$ *este variabil şi el se înconjoară cu un câmp electric* $\vec{E}_2$*. Conform inducţiei electromagnetice avem:*

$$\nabla \times \vec{E}_2 = -\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t}.$$

Deoarece $\vec{B}_1$ *depinde de r şi* $\vec{E}_2$ *va depinde de r (vezi 13).*

c) Pentru $r = 0$*, rezultă* $\vec{B}_1 = 0$ *şi deci* $E_2 = 0$.

Dar $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$.

Circulaţia vectorului E_2 *de-a lungul conturului* Γ_2 *este:*

$$\oint_{\Gamma_2} \vec{E}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -E_2(r) \cdot h.$$

Fluxul inducţiei magnetice $\vec{B}_1$ *este:*

$$\mathrm{d}\phi = B_1(r) \cdot h \cdot \mathrm{d}r$$

$$\phi = h \int_0^r B_1(r) \cdot \mathrm{d}r = \frac{i\omega h}{4c^2} r^2 E_0 e^{i\omega t}.$$

Dar:

$$\varepsilon = -\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{S_{\Gamma_1}} \vec{B}_1(r) \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \int_{\Gamma_2} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{\Gamma_2} \vec{E}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{l} = E_2(r) \cdot h.$$

Din ultimele două relaţii se obţine:

$\frac{\omega^2 h}{4c^2} r^2 E_0 e^{i\omega t} = -E_2(r) \cdot h$*, de unde:* $\vec{E}_2(r) = -\frac{\omega^2 r^2}{4c^2} \vec{E}_0 e^{i\omega t}$.

Câmpul indus E_2 *este de sens opus cu* E_1 *şi în expresia lui intervine distanţa dintre armături. Câmpul total va fi:*

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{4c}\right) \vec{E}_0 e^{i\omega t}$$

d) Câmpul magnetic total este: $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$.

Pe conturul Γ_1*, ecuaţia lui Maxwell,* $\nabla \times B_2 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_2}{\partial t^2}$ *devine:*

$$c^2 \oint \nabla \times \vec{B}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{E}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{A}.$$

adnotaţii.....

adnotaţii……

Aplicând teorema lui Stokes şi ţinând seama că $\vec{E}_2$ *depinde de r, rezultă:*

$$\vec{B}_2(r) = -\frac{i\omega^3 r^3}{16c^2}\vec{E}_0 e^{i\omega t}.$$

Deci $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$*, unde*

$$\vec{E}_3(r) = \frac{\partial}{\partial t}\int \vec{B}_2(r) = \frac{\omega^4 \cdot r^4}{16c^4}\vec{E}_0 \cdot e^{i\omega t}.$$

4. Se consideră două şine conductoare verticale paralele, AB şi CD, cu rezistenţa electrică neglijabilă. Planul şinelor este perpendicular pe liniile unui câmp magnetic omogen cu inducţia magnetică $\vec{B}$. Şinele sunt legate prin rezistorul de rezistenţă electrică R. O bară cu masa m, lungimea l şi rezistenţa neglijabilă este lăsată liber să cadă sprijinindu-se pe şine. Se cere să se găsească expresia intensităţii curentului electric prin bară în timpul căderii.

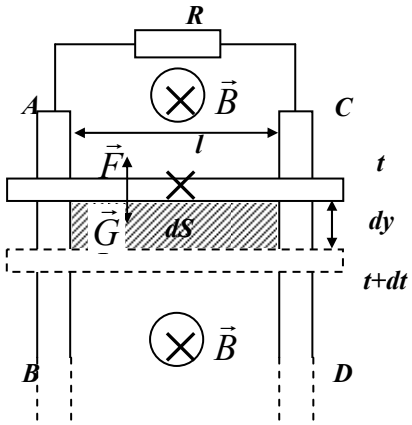


Figura 12.2

Rezolvare

Bara de lungime l pleacă din repaus (v0=0) sub acţiunea greutăţii G=mg.

În timpul dt bara va parcurge pe verticală distanţa dy acoperind suprafaţa $\mathrm{d}S = l \cdot \mathrm{d}y$*. Ca urmare fluxul magnetic prin suprafaţa circuitului (bară-şină-rezistor) va suferii variaţia* $\mathrm{d}\phi = B \cdot \mathrm{d}S = Bl\,\mathrm{d}y$ *şi în bară se va induce tensiunea electromotoare*

$$\mathrm{E} = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = Bl\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = Blv$$

unde v este viteza instantanee.
Prin circuit va trece curentul electric

$$i = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{Blv}{R}.$$

Asupra barei va acţiona forţa electromagnetică

$$F = Bil = \frac{B^2 l^2 v}{R}.$$

orientată în sens contrar greutăţii:
Ecuaţia de mişcare a barei este

$$ma = G - F \;\Rightarrow\; m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - \frac{B^2l^2v}{R}.$$

Separând variabilele, se găseşte

$$\frac{\mathrm{d}v}{g - \frac{B^2l^2}{mR}v} = \frac{\mathrm{d}v}{g - \frac{v}{k}} = \mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}(g - \frac{v}{k})}{g - \frac{v}{k}} = -\frac{\mathrm{d}t}{k}.$$

Integrând, se obţine

$$v = gk(1 - e^{-\frac{1}{K}t}) = g\frac{mR}{B^2l^2}(1 - e^{-\frac{B^2l^2}{mR}t}).$$

Astfel

$$i = \frac{Blv}{R} = \frac{gm}{Bl}(1 - e^{-\frac{B^2l^2}{mR}t}).$$

Din expresia de mai sus se observă că la t=0, i=0 (v=0) iar pentru $t \to \infty$*,*

$$v = \frac{mgR}{B^2l^2} = v_{\max} \text{ şi } i = \frac{mg}{Bl} = i_{\max}.$$

Observaţie: la rezultatele de mai sus pentru $t \to \infty$ se poate ajunge punând condiţia ca la $v=v_{max}=ct.$, $F=G \Rightarrow \frac{B^2l^2v_{\max}}{R} = mg \Rightarrow v_{\max} = \frac{mgR}{B^2l^2}$ şi $i_{\max} = \frac{Blv_{\max}}{R} = \frac{mg}{Bl}$.

5. O bară conductoare AB se deplasează (fără frecare) cu viteza $v = 10\mathrm{m/s}$ sprijinindu-se pe alte două bare conductoare orizontale care fac între ele unghiul $\beta = 2\alpha = 60^\circ$. Bara AB se află la momentul t=0 în punctul O şi are viteza orientată de-a lungul bisectoarei unghiului β Circuitul triunghiular este perpendicular pe liniile unui câmp magnetic uniform cu inducţia magnetică B=1T. Să se calculeze:

a) t.e.m. indusă în baza AB;

b) intensitatea curentului prin circuit, ştiind că bornele au rezistenţa pe metru de lungime $r = 1\frac{\Omega}{m}$;

c) forţa electromagnetică care acţionează asupra bornei AB.

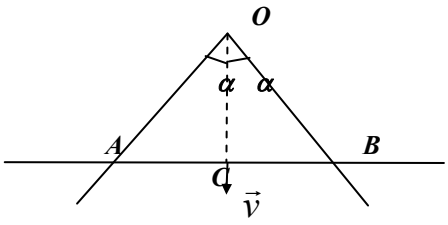


Figura 12.3

adnotaţii……

adnotaţii……

Rezolvare

a) La un moment t oarecare borna AB va parcurge spaţiul OC=vt şi va avea lungimea $AB = 2 \cdot OC \cdot \operatorname{tg}\alpha = 2vt \cdot \operatorname{tg}\alpha = 2vt \cdot \operatorname{tg}\alpha$ *şi va mătura suprafaţa* $S = \dfrac{AB \cdot OC}{2} = v^2 t^2 \operatorname{tg}\alpha$.

T.e.m. indusă în bara AB este:

$$E = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(B \cdot S) = B\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = 2Bv^2 t \cdot \operatorname{tg}\alpha$$

$$E = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 10^2 t \text{ V}$$

b) $$i = \frac{E}{R_{circuit}} = \frac{E}{r \cdot l_{circuit}} = \frac{E}{r \cdot 3 \cdot AB} = \frac{Bv}{3r},\ i = \frac{10}{3}\text{A}.$$

c) $$F = Bil_{AB} = \frac{2}{3}\frac{B^2 v^2 t}{r} \cdot \operatorname{tg}\alpha,\ F = \frac{2\sqrt{3}}{9} \cdot 10^2 t \quad \text{N}.$$

6. Un condensator plan cu aer este alimentat separat de la două surse de tensiune astfel încât câmpul electric dintre armăturile sale variază după legile:

a) $E(t) = 0,6t$;

b) $E(t) = 10\sin 50\pi t$.

c) Să se calculeze inducţia câmpului magnetic într-un punct P situat la distanţa r de axa condensatorului în regiunea în care câmpul electric este uniform.

Rezolvare

Varianta I.

a) Curentul de deplasare dintre armăturile condensatorului este $i_\mathrm{d} = \varepsilon_0 \dfrac{\partial E}{\partial t} = 0,6\varepsilon_0$. *Câmpul magnetic al acestui curent este*

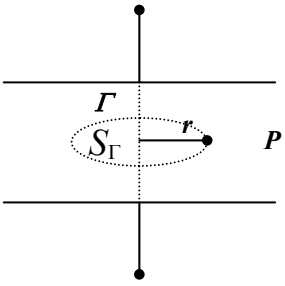


Figura 12.4

$$B = \mu_0 \frac{i_\mathrm{d}}{2\pi r} = \mu_0 \frac{j_\mathrm{d} \cdot S}{2\pi r} = \mu_0 \frac{j_\mathrm{d} \cdot \pi r^2}{2\pi r} = \frac{\mu_0 j_\mathrm{d} \cdot r}{2} 0,3\varepsilon_0 \mu_0 r$$

.

Varianta II.

a) din ecuaţia lui Maxwell:

$$\nabla \times \vec{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \oint_{S_\Gamma} (\nabla \times \vec{H})\,\mathrm{d}\vec{S} = \int_\Gamma \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \Rightarrow$$

$$\varepsilon_0 \int_{S_\Gamma} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_{\Gamma} \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \Rightarrow \varepsilon_0 \cdot 0,6 \cdot \pi r^2 = H \cdot 2\pi r \Rightarrow H = 0,3\varepsilon_0 r \Rightarrow$$

$$B = \mu_0 H = 0,3\varepsilon_0 \mu_0 r$$

b) $$j_{\mathrm{d}}^{'} = \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = 500\pi\varepsilon_0 \cos 50\pi t$$

$$B' = \frac{\mu_0 r}{2} j_{\mathrm{d}}^{'} = 250\pi\mu_0\varepsilon_0 r \cos 50\pi t\,.$$

BIBLIOGRAFIE

[1] ***Moşescu***, N.; ***Hotinceanu***, M., (1987), *Îndrumar pentru disciplina – FIZICA*, volumul II, Ploieşti, Institutul Petrol şi Gaze Ploieşti

[2] ***Luca***, E.; ***Ciubotariu***, C.; ***Zet***, Gh.; ***Vasiliu***, A., (1986), *Fizică*, Bucureşti, Editura Didactică şi Pedagogică

[3] ***Nicula***, Al.; ***Cristea***, Gh., ***Simon***, S., (1982), *Electricitate şi magnetism*, Bucureşti, Editura Didactică şi Pedagogică

[4] ***Tutovan***, V.; ***Gotlieb***, I., (1998), *Electricitate şi magnetism*, *Probleme de electrostatică*, Chişinău, Editura Tehnică

[5] ***Purcell***, E. M., (1982), *Electricitate şi magnetism (Cursul de fizică Berkeley, vol II)*, Bucureşti, Editura Didactică şi Pedagogică

[6] ***Hagiescu***, M.; ***Hotinceanu*** M., (1979), *Probleme şi aplicaţii pentru cursul de fizică*, Ploieşti, Institutul Petrol şi Gaze

[7] ***Popescu***, I. M.; ***Cone***, G. F.; Stanciu, G. A., (1996), *Culegerea de probleme de fizică*, Bucureşti, Editura Didactică şi Pedagogică

[8] ***Inţa***, I.; ***Dumitru***, S., (1982), *Complemente de fizică*, Bucureşti, Editura Tehnică

[9] ***Tutovan***, V., (1984), *Electricitate şi magnetism,* Bucureşti, Editura Tehnică

[10] ***Feynman***, R. P., (1970), *Fizica modernă – Electromagnetismul, structura materiei,* Bucureşti, Editura Tehnică

[11] ***Creţu***, T., (1984), *Fizica Generală, vol I*, Bucureşti, Editura Tehnică

[12] ***Hotinceanu***, M., (2001), *Probleme şi lucrări de laborator de electromagnetism*, Ploieşti, Editura ILEX şi Editura Universităţii din Ploieşti,

[13] ***Niculescu***, T.; ***Costinaş***, S., (1998), *Electrotehnică, Câmpul electromagnetic*, Petroşani, Litografia Universităţii din Petroşani

[14] ***Saimac***, A.; ***Cruceru***, C., (1981), *Electrotehnică*, Bucureşti, Editura didactică şi Pedagogică Bucureşti

[15] ***Luca***, E., (1976), *Elemente de fizică modernă*, (21), Iaşi, Editura Junimea

✍ adnotaţii……

Modulul IV. FIZICĂ CUANTICĂ

Obiectivele modului

- *Cunoaşterea noţiunilor de bază ale fenomenelor cuantice*
- *Dualismul undă corpuscul*
- *Cunoaşterea formalismului Schrödinger*
- *Aplicaţii ale ecuaţiei Schrödinger*

Cuprins Modulul IV

13. ELEMENTE DE MECANICĂ CUANTICĂ 219
13.1 Introducere 219
13.1.1 Noţiuni introductive 219
13.1.2 Funcţia de undă. Relaţiile lui Heisenberg 222
13.1.3 Ecuaţia lui Schrödinger 224
13.2 Aplicaţii ale ecuaţiei lui Schrödinger 226
13.2.1 Microparticula liberă 226
13.2.2 Microparticula în groapa unidimensională de potenţial 227
13.2.3 Bariera de potenţial. Efectul tunel 232
13.2.4 Oscilatorul liniar armonic 234
13.2.5 Atomul de hidrogen şi ionii hidrogenoizi 238
BIBLIOGRAFIE 241

adnotaţii……

13. ELEMENTE DE MECANICĂ CUANTICĂ

13.1 Introducere

13.1.1 Noţiuni introductive

Mecanica căreia i se supun fenomenele atomice adică fenomenele care au loc cu particule de masă foarte mică şi în domenii spaţiale foarte mici poartă numele de mecanică cuantică.

Mecanica cuantică este construită pe concepţii asupra mişcării principial diferite de concepţiile mecanicii clasice. Aceasta se explică prin comportarea diferită a sistemelor cuantice (atomi, molecule, particule elementare etc.) de aceea a obiectelor din mecanica clasică.

Mecanica cuantică, pentru microparticule nerelativiste, a apărut concomitent şi independent sub forma mecanicii ondulatorii a lui Schrödinger şi sub forma mecanicii matriciale a lui Heisenberg. Deosebindu-se doar prin aparatul matematic utilizat cele două căi de abordare conduc la aceleaşi rezultate. În lucrarea de faţă se va apela la formalismul Schrödinger care este mai abordabil şi deci mai uşor de înţeles de către studenţi.

Baza aparatului matematic al mecanicii cuantice este faptul că fiecare stare a unui sistem cuantic poate fi descrisă la un moment dat de o funcţie $\psi(\vec{r},t)$ ataşată sistemului cuantic şi numită funcţie de undă a sistemului. Conform teoriei lui Born pătratul modulului funcţiei de undă determină distribuţia de probabilitate a coordonatelor; $\left|\psi(\vec{r},t)\right|^2 \mathrm{d}q$ este probabilitatea ca o măsurare efectuată asupra sistemului să dea valorile coordonatelor cuprinse în elementul dq din spaţiul configuraţiilor. Altfel spus

$$w(\vec{r},t)=\left|\psi(\vec{r},t)\right|^2=\psi^*\cdot\psi \qquad (13.1)$$

reprezintă densitatea de probabilitate de a găsi microparticula, la momentul t, în punctul $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.

Mărimea

adnotaţii …..

$$\mathrm{d}P = \left|\psi\left(\vec{r},t\right)\right|^2 \mathrm{d}V = w\left(\vec{r},t\right)\mathrm{d}V \qquad (13.2)$$

reprezintă probabilitatea ca microparticula să se găsească, la momentul t, în elementul de volum $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ centrat pe punctul de coordonate x, y şi z.

Dacă o microparticulă evoluează cu certitudine într-un volum V atunci

$$\int_V \left|\psi\left(\vec{r},t\right)\right|^2 \mathrm{d}V = 1 \qquad (13.3)$$

şi exprimă condiţia de normare pentru funcţia de undă ψ.

Dacă funcţia de undă descrie starea unui sistem cuantic se pune acum întrebarea firească de ce această funcţie se numeşte „de undă" şi cum poate fi cunoscută aceasta ?

Pentru a răspunde la această întrebare se vor reaminti câteva cunoştinţe din istoria controversată a naturii luminii. Este cunoscut că teoria electromagnetică a luminii, dezvoltată pe baza ecuaţiilor lui Maxwell, a explicat o gamă largă de fenomene cum ar fi interferenţa, difracţia, polarizarea etc.

Fenomenele de interacţiune a luminii cu unele microparticule (efectul Compton, efectul fotoelectric extern) nu au mai putut fi explicate pe baza teoriei ondulatorii a luminii.

Astăzi este unanim acceptat că radiaţiile sunt emise, se propagă şi sunt absorbite sub formă de cuante de energie; purtătorii acestor cuante de energie sunt fotonii.

Energia unui foton este dată de formula

$$\varepsilon = h\nu \qquad (13.4)$$

unde ν este frecvenţa, iar $h = 6,625 \cdot 10^{-34}\,Js$ este constanta lui Planck.

Conform teoriei lui Einstein, fotonului i se atribuie atât energia ε cât şi impulsul p, aceste mărimi fiind legate între ele prin relaţia

$$\varepsilon = c\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2} \qquad (13.5)$$

în care c este viteza luminii în vid iar m_0 este masa de repaos.

Deoarece expresia masei în teoria relativităţii este

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (13.6)$$

şi fotonii se deplasează doar cu viteza c, rezultă că masa de repaus a fotonilor m_0, este egală cu zero.

Ţinând de această concluzie, din expresia (13.5) se găseşte că

$$p = \frac{\varepsilon}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2\pi}\frac{2\pi}{\lambda} = \hbar k \qquad (13.7)$$

Vectorial, (13.7) se scrie

$$\vec{p} = \hbar\vec{k} \qquad (13.8)$$

unde k este modulul vectorului de undă $\vec{k}$.

Din cele arătate mai sus se pot face următoarele afirmaţii. Lumina (în general undele electromagnetice) are un caracter dual (dublu); de undă şi de corpuscul. Altfel spus, lumina nu este nici pur corpusculară şi nici pur ondulatorie ci are câte ceva din cele două caracteristici; în fenomenele de interferenţă, difracţie etc. predomină caracteristicile ondulatorii iar în efectul Compton sau în efectul fotoelectric extern predomină caracteristicile corpusculare.

De asemenea se observă că expresia (13.8) conţine, pe lângă constantele h şi c, mărimile fizice λ - caracteristică undelor şi p - caracteristică particulelor.

Pornind de la dualismul undă-corpuscul al radiaţiei electromagnetice, Louis de Broglie a extins ideea dualităţii undă-corpuscul de la radiaţia electromagnetică la particulele materiale. După de Broglie, fiecărei particule de masă m şi impuls $p = mv$ i se poate ataşa (asocia) o undă cu lungimea de undă

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \qquad (13.9)$$

Undele asociate particulelor sunt cunoscute şi sub numele de unde de Broglie.

Ipoteza lui de Broglie a fost repede confirmată experimental de experimentele fizicienilor C. T. Danisson, G. P. Thomson, L. N. Germer şi P.

✍ adnotaţii……

adnotaţii …..

S. Tartakowski (cu fascicule de electroni) şi de fizicianul Stern cu fascicule atomice şi moleculare.

Mecanica cuantică studiază evoluţia sistemelor cuantice prin intermediul undelor de Broglie şi anume cu ajutorul ecuaţiei care descrie propagarea acestor unde.

13.1.2 Funcţia de undă. Relaţiile lui Heisenberg

Aşa cum s-a arătat, conform ipotezei lui de Broglie, unei microparticule în mişcare liberă de-a lungul axei Ox i se asociază o undă cu lungimea de undă dată de expresia (13.9) şi caracterizată de funcţia de undă

$$\psi(x,t) = \psi_0 e^{-i(\omega t - kx)} = \psi_0 e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - px)} \qquad (13.10)$$

unde $E = mc^2$ este energia particulei, $p = mv$ este impulsul particulei, k este numărul de undă, iar ω este pulsaţia unghiulară.

Viteza de propagare a undei de Broglie numită şi viteză de fază deoarece reprezintă viteza cu care se deplasează suprafeţele de undă, adică suprafeţele de fază constantă $Et - px = const.$ este dată de expresia

$$u = v_f = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{E}{p} = \frac{mc^2}{mv} = \frac{c^2}{v} \qquad (13.11)$$

Deoarece viteza v a microparticulei este mai mică decât viteza c a luminii în vid rezultă că viteza de fază v_f a undei de Broglie este mai mare decât c.

Această concluzie, $v_f > c$, nu intră în contradicţie cu principiul relativităţii restrânse deoarece viteza de fază nu este o viteză de propagare a interacţiunilor. În acelaşi timp, această concluzie arată că nu se poate asocia unei particule o undă plană monocromatică.

Pentru a depăşi acest impas s-a căutat să se asocieze unei particule în mişcare un pachet (grup) de unde în locul unei unde monocromatice. Pachetul de unde, obţinut prin suprapunerea unui ansamblu de unde armonice plane ale căror numere de undă k sunt cuprinse în intervalul $k_0 - \frac{\Delta k}{2}$ şi $k_0 + \frac{\Delta k}{2}$ şi

pentru care impulsul p al particulei este cuprins în intervalul $p_0 - \frac{\Delta p}{2}$ şi $p_0 + \frac{\Delta p}{2}$ este

$$\psi(x,t) = \int_{k_0-\frac{\Delta k}{2}}^{k_0+\frac{\Delta k}{2}} \psi_0 e^{-i(\omega t - kx)}\, \mathrm{d}k\,. \qquad (13.12)$$

Viteza de deplasare a pachetului (grupului) de unde se numeşte viteză de grup şi este dată de expresia

$$v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\,. \qquad (13.13)$$

Deoarece, pentru undele de Broglie, $E = h\nu = \hbar\omega$ şi $E = c\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}$ şi $p = \hbar k$, pentru viteza de grup se găseşte expresia

$$v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p} = \frac{c^2 p}{E} = \frac{c^2 m v}{mc^2} = v\,. \qquad (13.14)$$

Deci viteza de deplasare a pachetului de unde (v_g) este egală cu viteza v a particulei. În acest fel se poate asocia mişcarea particulei cu mişcarea maximului principal al pachetului de unde (figura 13.1)

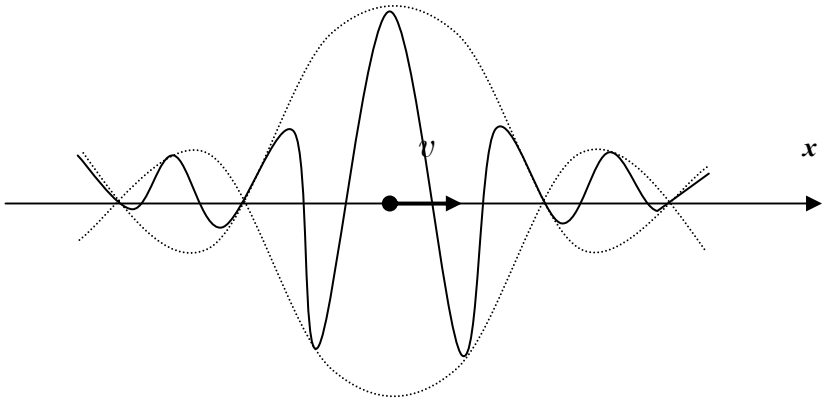


Figura 13.1

La un moment dat t, pachetul de unde (13.12) se întinde pe o distanţă Δx, dată de relaţia

$$\frac{\Delta x \cdot \Delta p}{\hbar} \geq \frac{1}{2} \qquad (13.15)$$

adnotaţii……

adnotaţii ……

sau

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \qquad (13.16)$$

Expresia (13.16) arată că şi în cazul $v_g = v$, ilustrat prin figura 13.1, intervin dificultăţi în localizarea, în timp şi spaţiu, a microparticulelor.

Relaţia

$$\Delta p \cdot \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$$

precum şi relaţia

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \qquad (13.17)$$

sunt cunoscute sub numele de relaţiile de nedeterminare ale lui Heisenberg.

Aceste relaţii au un caracter fundamental în mecanica cuantică, exprimând deosebirea calitativă de comportare a particulelor cuantice în raport cu cele clasice.

Relaţiile de nedeterminare ale lui Heisenberg arată că la nivel microscopic există perechi de variabile dinamice $(\Delta p, \Delta x)$ sau $(\Delta E, \Delta t)$ ale căror valori nu pot fi stabilite concomitent cu o precizie oricât de mare şi deci cunoştinţele noastre la acest nivel trebuie să fie în mod principial limitate ca urmare a intervenţiei aparatelor de măsură utilizate care schimbă necontrolat starea microobiectului studiat.

13.1.3 Ecuaţia lui Schrödinger

După cum s-a arătat mecanica cuantică urmăreşte evoluţia particulelor prin intermediul undelor de Broglie şi anume cu ajutorul ecuaţiei care descrie propagarea acestor unde. Pentru a obţine ecuaţia a cărei soluţie este funcţia de undă se postulează că se poate porni de la ecuaţia de propagare a undelor

$$\nabla^2 \psi(\vec{r}, t) - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \psi(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0 \qquad (13.18)$$

Soluţia ecuaţiei (13.18) este de forma:

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi_0 e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{p} \cdot \vec{r})} \qquad (13.19)$$

Pentru simplitatea calculelor să considerăm o undă de Broglie care se propagă în lungul axei Ox. În acest caz (13.18) şi (13.19) devin:

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}-\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0 \qquad (13.20)$$

şi $$\psi(\vec{r},t)=\psi_0 e^{-\frac{i}{\hbar}(Et-\vec{p}\cdot\vec{r})}=\psi_0 e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{x}}e^{-\frac{i}{\hbar}Et}=\psi(\vec{r})e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \qquad (13.21)$$

Deoarece $\hbar=\frac{h}{2\pi}$ şi $p=mu=\frac{h}{\lambda}=\frac{h\nu}{u}$, derivând (13.21) se găseşte, în cazul unidimensional:

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi(r)}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{4\pi^2\nu^2}{u^2}\psi(x) \qquad (13.22)$$

Dar

$$\frac{u}{\nu}=\lambda=\frac{h}{p}=\frac{h}{\sqrt{2mE_c}}=\frac{h}{\sqrt{2m(E-U(x))}} \qquad (13.23)$$

În (13.23) E reprezintă energia totală a microparticulei, iar $U(x)$ energia potenţială, iar E_c energia cinetică.

Din (13.22) şi (13.23) se găseşte:

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi(x)}{\mathrm{d}x^2}+\frac{8\pi^2 m}{h^2}(E-U(x))\psi(x)=0 \qquad (13.24)$$

Generalizând (13.24), se obţine:

$$\Delta\psi(\vec{r})+\frac{2m}{\hbar}(E-U(\vec{r}))\psi(\vec{r})=0 \qquad (13.25)$$

Din (13.25) se determină partea spaţială a funcţiei de undă $\psi(\vec{r})$ şi după aceea se poate introduce în (13.21) pentru a obţine funcţia de undă completă $\psi(\vec{r},t)$ care depinde atât de coordonatele spaţiale cât şi de timp.

Ecuaţia (13.25) reprezintă ecuaţia staţionară a lui Schrödinger.

Pentru ca rezultatele obţinute pe baza soluţiilor ecuaţiei lui Schrödinger să fie în concordanţă cu datele experimentale, asupra acestor soluţii (funcţii) se impun următoarele condiţii:

- funcţia de undă ψ trebuie să fie continuă şi să aibă derivată continuă,
- funcţia de undă trebuie să fie finită în tot domeniul de existenţă al particulei şi nulă la limitele acestui domeniu,

✍ adnotaţii……

adnotaţii …..

- funcţia de undă trebuie să fie univocă.

Soluţiile ecuaţiei lui Schrödinger care satisfac condiţiile de mai sus există numai dacă parametrul E, adică energia totală a particulei, ia anumite valori $E_1, E_2, E_3, \ldots$ numite valori proprii ale energiei.

Unei valori proprii E îi pot corespunde o funcţie proprie sau n funcţii proprii. În primul caz starea particulei se numeşte nedegenerată, iar în al doilea caz starea este degenerată.

Valorile proprii ale energiei $E_1, E_2, E_3, \ldots$ formează spectrul energetic al particulei. Acest spectru este discret (discontinuu) dacă mişcarea particulei are loc într-un spaţiu limitat şi este continuu dacă mişcarea particulei este liberă.

13.2 Aplicaţii ale ecuaţiei lui Schrödinger

13.2.1 Microparticula liberă

O microparticulă care este liberă este caracterizată prin energia potenţială $U(\vec{r}) = U(x, y, z) = 0$. În acest caz ecuaţia lui Schrödinger (13.25) devine:

$$\Delta\psi(\vec{r}) + \frac{2m}{\hbar^2} E\psi(\vec{r}) = 0 \qquad (13.26)$$

Dacă microparticula se deplasează în lungul axei Ox atunci ecuaţia (13.26) se scrie astfel:

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi(x)}{\mathrm{d}x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E\psi(x) = 0 \qquad (13.27)$$

Făcând notaţia:

$$K_x = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2mE} = \frac{p}{\hbar} \qquad (13.28)$$

ecuaţia (13.28) devine:

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi(x)}{\mathrm{d}x^2} + K_x^2\psi(x) = 0 \qquad (13.29)$$

Soluţia acestei ecuaţii este de forma:

$$\psi(x) = A\mathrm{e}^{iK_x x} + B\mathrm{e}^{-iK_x x} \qquad (13.30)$$

Funcţia de undă completă, de forma (13.21) este:

$$\psi(x,t)=\psi(x)\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}Et}=(A\mathrm{e}^{iK_x x}+B\mathrm{e}^{-iK_x x})\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}Et}.$$

Funcţia $\psi(x,t)$ descrie o undă case se propagă pe direcţia x; termenul $A\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}(Et-\hbar K_x x)}$ corespunde undei care se propagă în sensul axei Ox (undă progresivă), iar termenul $B\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}(Et+\hbar K_x x)}$ corespunde undei care se propagă în sens contrar axei Ox (undă regresivă) care în cazul microparticulei libere nu are semnificaţie fizică.

În concluzie, soluţia ecuaţiei lui Schrödinger pentru o particulă liberă reprezintă o undă plană care se propagă pe direcţia axei Ox cu pulsaţia

$$\omega=\frac{E}{\hbar}$$

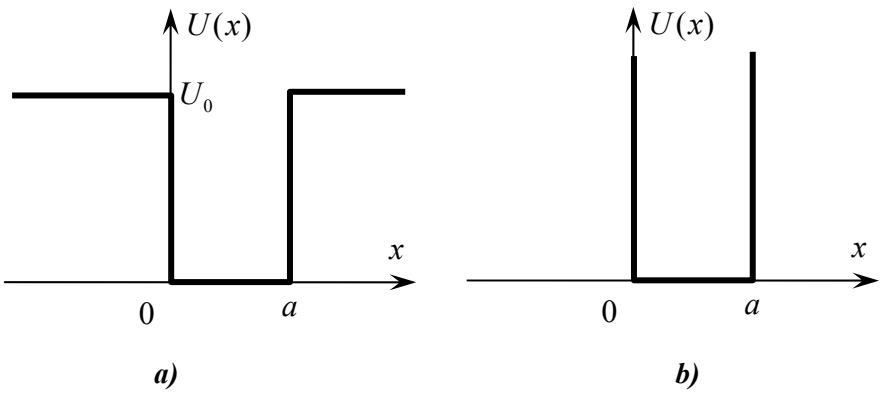
şi având vectorul de undă

$$\vec{K}=\frac{1}{\hbar}\cdot\vec{p}.$$

13.2.2 Microparticula în groapa unidimensională de potenţial

În realitatea fizică se cunosc stări ale microparticulelor care pot fi studiate cu ajutorul „gropii de potenţial”, figura 13.2*a*. Funcţia care descrie groapa de potenţial este

$$U(x)=\begin{cases}0 & pentru\ 0\le x\le a\\ U_0 & pentru\ x\in(-\infty,0)\cup(a,\infty)\end{cases}.$$



a) ***b)***

Figura 13.2. Groapa de potenţial unidimensională

adnotaţii……

adnotaţii …..

Fără a restrânge generalitatea, dar pentru a simplifica calculele, se poate studia o groapă de potenţial unidimensională cu pereţii infiniţi (figura 13.2*b*) adică

$$U(x)=\begin{cases}0 \quad pentru\ 0\le x\le a\\ \infty\ pentru\ x\in(-\infty,0)\cup(a,\infty)\end{cases}.$$

Studiul cuantic al unei microparticule într-o astfel de groapă cu pereţii perfect reflectători se face pornind de la ecuaţia lui Schrödinger:

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi(x)}{\mathrm{d}x^2}+\frac{2m}{\hbar^2}E\psi(x)=0 \qquad (13.31)$$

Utilizând notaţia:

$$K=\frac{1}{\hbar}\sqrt{2mE} \qquad (13.32)$$

soluţia ecuaţiei (13.31) este:

$$\psi(x)=Ae^{iKx}+Be^{-iKx} \qquad (13.33)$$

Utilizând relaţiile lui Euler, pentru funcţia de undă se găseşte expresia:

$$\psi(x)=C\sin(Kx+\delta) \qquad (13.34)$$

Deoarece in regiunile unde $U(x)=\infty$ microparticula nu poate pătrunde, funcţia de unda trebuie sa fie nulă.

Astfel:

pentru $x=0,\ U(0)=\infty$ si $\psi(0)=0$, adică

$$\psi(0)=c\sin\delta=0\Rightarrow\delta=0, \qquad (13.35)$$

pentru $x=a,\ U(a)=\infty$ şi $\psi(a)=0,$ adică

$$\psi(a)=c\sin Ka=0\Rightarrow Ka=n\pi \qquad (13.36)$$

Din (13.32) şi (13.36) se găseşte

$$\mathrm{E}=\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}n^2, n=1,2,3... \qquad (13.37)$$

Expresia (13.37) a energiei unei microparticule in groapa de potenţial arata că energia este cuantificată. Procesul de cuantificare al energiei este cu atât mai accentuat cu cât masa particulei (m) şi lărgimea gropii de potenţial (a) sunt mai mici.

adnotaţii……

În afara spectrului energetic al microparticulei dat de (13.37), interesează şi funcţiile proprii. Utilizând expresiile (13.34), (13.35), (13.37) şi (13.32) se găseşte:

$$\psi(x) = c\sin Kx = c\sin\frac{1}{\hbar}\sqrt{2mE}\,x = c\sin\frac{n\pi}{a}x \qquad (13.38)$$

Coeficienţii c pot fi determinaţi din condiţia de normare (13.3):

$$\int_0^a \psi^2\,\mathrm{d}x = c^2\int_0^a \sin^2\frac{n\pi x}{a}\,\mathrm{d}x = c^2\frac{a}{n\pi}\int_0^a \sin^2\frac{n\pi x}{a}\frac{n\pi}{a}\,\mathrm{d}x$$

$$= c^2\frac{a}{n\pi}\left(\frac{n\pi a}{2a} - \frac{\sin^2\dfrac{\pi n a}{a}}{4}\right) = c^2\frac{a}{2} = 1 \qquad (13.39)$$

Deoarece din (13.39) se obţine, pentru funcţiile proprii se găseşte expresia:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi}{a}x \qquad (13.40)$$

Utilizând expresiile (13.37) şi (13.40) se pot găsii valorile proprii ale lui E şi ψ :

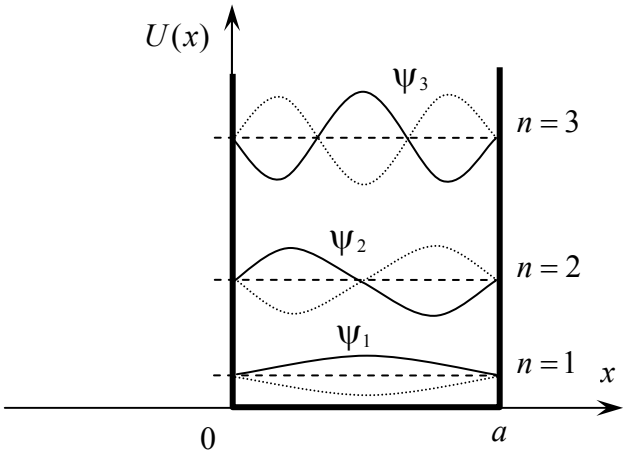


Figura 13.3. Groapa de potenţial; spectrul energetic şi funcţiile de undă

$$n=1,\ E_1 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}, \psi_1 = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{\pi}{a}x$$

$$n=2,\ E_2 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}4 = 4E_1, \psi_2 = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{2\pi}{a}x \qquad (13.41)$$

adnotaţii …..

$$n=3,\ E_3=\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}9=9E_1,\psi_3=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{3\pi}{a}x$$

Starea corespunzătoare lui se numeşte stare fundamentala iar starea corespunzătoare lui se numesc stări excitate.

În figura 13.3 sunt reprezentate primele trei nivele energetice cuantificate şi funcţiile de undă a căror expresii sunt date de (13.41)

Observaţii

Dacă se consideră că microparticula este închisă într-o cutie de forma unui cub cu latura a, atunci expresia energiei este:

$$E_{n_x,n_y,n_z}=\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\left(n_x^{\ 2}+n_y^{\ 2}+n_z^{\ 2},\right),\ \ n_x,n_y,n_z=1,2,3... \quad (13.42)$$

iar funcţia de undă are forma:

$$\psi(x,y,z)=A\sin\frac{n_x\pi}{a}x\sin\frac{n_y\pi}{a}y\sin\frac{n_z\pi}{a}z \quad (13.43)$$

Dacă se consideră electronii liberi dintr-un metal, care se găsesc într-o groapă de potenţial finită macroscopică, atunci acestea posedă aceeaşi energie potenţiala care, pentru simplificare, poate fi considerată ca energie de referinţa $U=0$.

Pentru electronii liberi din metal, ecuaţia lui Schrödinger se scrie:

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi(x)}{\mathrm{d}x^2}+\frac{2m}{\hbar^2}E\psi=0 \quad (13.44)$$

Deoarece metalul este o reţea unidimensională în care condiţiile se repeta periodic pe distanţa a, funcţia de undă, de asemenea periodică, trebuie să respecte simetria cristalină, adică să satisfacă condiţia:

$$\psi(x)=\psi(x\pm a)=\psi(x\pm 2a)=... \quad (13.45)$$

Deoarece soluţia ecuaţiei (13.44) este de forma $\psi(x)=c\sin kx,$ unde, $k=\frac{1}{\hbar}\sqrt{2m_eE}$ atunci punând condiţia $\psi(x)=\psi(x+a)$, se găseşte:

$$ka=2\pi m_x,m_x=0,1,2... \quad (13.46)$$

Rezultă că energia electronilor liberi din metal este cuantificată de expresia:

$$E_n=\frac{\hbar^2k^2}{2m_e}=\frac{2\pi^2\hbar^2}{m_ea^2}m_x^2 \quad (13.47)$$

Saltul electronilor între doua nivele energetice cu m_x si m_{x+1}, se face cu schimbul energetic:

$$\varepsilon = E_{m_{x+1}} - E_{m_x} = \frac{2\pi^2\hbar^2}{m_e a^2}(2m_x + 1) \qquad (13.48)$$

Reprezentând nivelele energetice ale electronului liber dintr-un metal într-o schemă Grotrian se obţine o bandă energetică (permisă) reprezentată în figura 13.4.

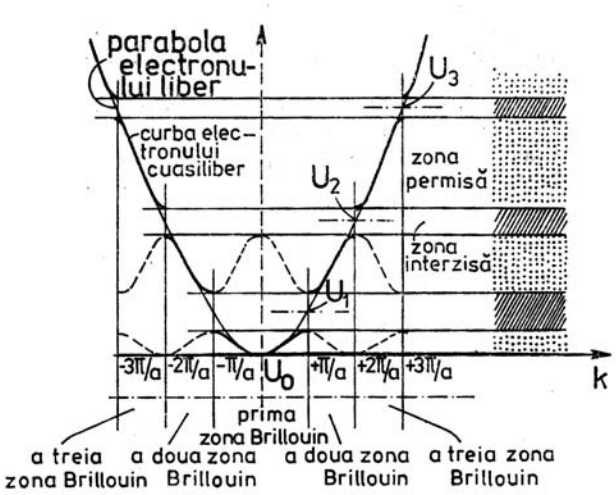


Figura 13.4. Groapa de potenţial pentru electronii liberi dintr-un metal

Rezultă că electronii pot trece foarte uşor de pe un nivel energetic pe altul. Aceşti electroni, consideraţi liberi, determina condiţia electrica a solidului, iar banda energetică corespunzătoare lor se numeşte bandă de conducţie. Ocuparea nivelelor energetice ale benzii de conducţie de către electronii liberi ai metalului se face începând cu nivelele energetice cele mai coborâte ale benzii. Nivelul energetic cu energia cea mai mare, ocupat de electroni la $0\,\mathrm{K}$ se numeşte nivelul Fermi EF. Nivelele energetice plasate, în cazul benzii de conducţie, deasupra nivelului Fermi, nefiind ocupate cu electroni, pot fi ocupate uşor de electronii plasaţi sub nivelul Fermi. Electronii liberi pot părăsi metalul (groapa de potenţial) deoarece groapa finita de potenţial reprezintă solidul în ansamblul lui. Pentru a-l părăsi, electronilor trebuie să li se comunice o energie E_{ex}, care conduce la apariţia fenomenelor de emisie electronică: emisia termoelectronică, emisia autoelectronică, emisia electronică secundară, emisia fotoelectronică.

✍ adnotaţii……

adnotaţii …..

13.2.3 Bariera de potenţial. Efectul tunel

Fie o microparticulă de masă m şi energie E care se deplasează în sensul pozitiv al axei Ox. Pe traseul microparticulei se află o barieră dreptunghiulară de potenţial cu înălţimea U_0 şi lărgimea a (figura 13.5).

Ecuaţiile lui Schrödinger pentru cele trei regiuni in care se poate găsi microparticule sunt:

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi(x)}{\mathrm{d}x^2}+\frac{2m}{\hbar^2}E\psi(x)=0 \text{ (regiunile I şi III)} \qquad (13.49)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi(x)}{\mathrm{d}x^2}+\frac{2m}{\hbar^2}(E-U_0)\psi(x)=0 \text{ (regiunea II)} \qquad (13.50)$$

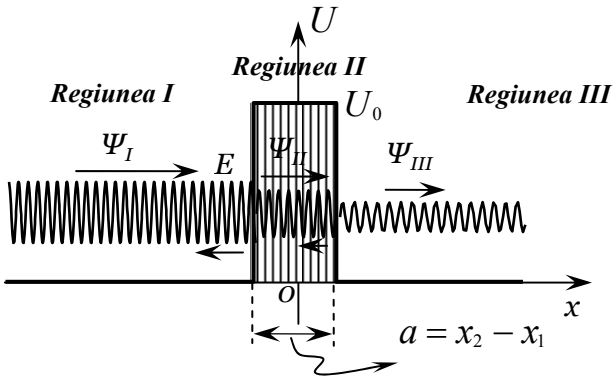


Figura 13.5. Bariere de potenţial dreptunghiulară

Soluţiile ecuaţiilor lui Schrödinger corespunzătoare celor trei regiuni vor avea următoarele forme:

$$\begin{aligned}\psi_1(x)&=A_1\mathrm{e}^{ik_1x}+B_1\mathrm{e}^{-ik_1x}\\ \psi_2(x)&=A_2\mathrm{e}^{ik_2x}+B_2\mathrm{e}^{-ik_2x}\\ \psi_3(x)&=A_3\mathrm{e}^{ik_3x}+B_3\mathrm{e}^{-ik_3x}\end{aligned} \qquad (13.51)$$

$$\text{unde, } K_1=\frac{1}{\hbar}\sqrt{2mE} \text{ si } K_2=\frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(E-U_0)} \qquad (13.52)$$

Termenii $A_1\mathrm{e}^{ik_1x}$ şi $A_2\mathrm{e}^{ik_2x}$ sunt asociaţi undelor incidente pe pereţii barierei, iar termenii $B_1\mathrm{e}^{-ik_1x}$ şi $B_2\mathrm{e}^{-ik_2x}$ sunt asociaţi undelor reflectaţi de pereţii barierei. In domeniul III exista numai unda care a trecut prin bariera şi se

adnotaţii……

propaga in sensul pozitiv al axei x. Altfel spus, in regiunea III nu exista unda reflectata, şi ca urmare $B_3 = 0$.

Problema care se pune este aceea dacă microparticula trece în orice situaţie din regiunea I in regiunea III. În cadrul teoriei clasice, particula cu energie $E < U_0$, care se mişcă in sensul axei Ox, pornind din regiunea I se „reflectă" de bariera de potenţial şi se mişcă în sens invers. Altfel spus, o particulă cu $E < U_0$ nu poate trece peste bariera de potenţial. Dacă $E < U_0$ atunci particula

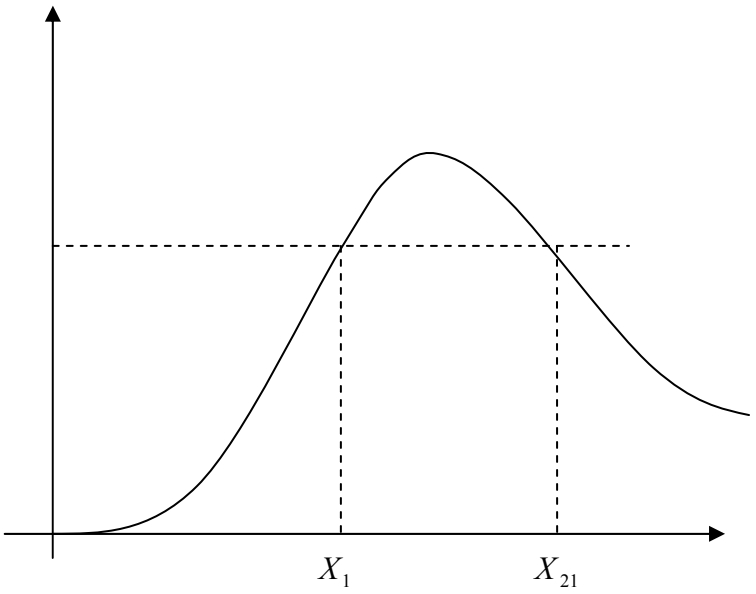


Figura 13.6. Tunelarea printr-o bariera de potenţial de o formă oarecare

poate trece peste barieră dar cu o viteza mai mică decât regiunea I.

În cadrul mecanicii cuantice probabilitatea $|\psi_2|^2$ de-a găsi particule în regiunea II este diferită de zero şi în cazul $E < U_0$. Deşi această probabilitate scade exponenţial spre dreapta, mecanica cuantică nu exclude posibilitatea ca particula să treacă din regiunea I in regiunea III şi în cazul $E < U_0$.

O microparticulă care traversează bariera de potenţial când energia ei este mai mica decât înălţimea barierei de potenţial, se spune ca traversează bariera de potenţial prin efect tunel.

Dacă energia potenţială $U(x)$ este aceeaşi in regiunea I şi III atunci se defineşte transparenţa (sau coeficientul de transmisie) D a unei bariere de

adnotaţii …..

potenţial ca raportul dintre probabilitatea de-a găsi particula în regiunea III şi probabilitatea de-a o găsi în regiunea I.

$$D=\frac{A_3A_3^*}{A_1A_1^*}=16\frac{E}{U_0}\left(1-\frac{E}{U_0}\right)\mathrm{e}^{-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U_0-E)}a}=D_0\mathrm{e}^{-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(E-U_0)}a} \quad (13.53)$$

Dacă bariera de potenţial nu este dreptunghiulară $U=U_0=ct$ ci are o formă oarecare $U=U(x)$, atunci transparenţa este data de expresia (vezi şi figura 13.6):

$$D=D_0\mathrm{e}^{-\frac{2}{\hbar}\int_{x1}^{x}\sqrt{2m[U(x)-E]}\,\mathrm{d}x} \quad (13.54)$$

Din expresiile (13.53) şi (13.54) se desprind următoarele concluzii:

1. în cadrul mecanicii cuantice microparticulele au un comportament specific în sensul că pot trece printr-o barieră de potenţial şi în cazul $E<U_0$, aceasta însemnând că transparenţa barierei nu este nulă deşi scade foarte repede cu energia;

2. transparenţa barierei de potenţial scade exponenţial cu grosimea barierei de potenţial dacă $E<U_0$.

Pe baza efectului tunel se poate explica desintegrarea α, emisia autoelectronică, funcţionarea diodei tunel etc.

13.2.4 Oscilatorul liniar armonic

O particulă cu masa m care efectuează o oscilaţie armonică cu pulsaţia ω de-a lungul direcţii x sub acţiunea unei forţe $F=-Kx$ reprezintă un oscilator liniar armonic.

Deoarece energia potenţială $U(X)$ a oscilatorului liniar armonic este

$$U(x)=\frac{1}{2}\mathrm{Kx}^2=\frac{1}{2}\mathrm{m}\omega^2\mathrm{x}^2, \quad (13.55)$$

ecuaţia lui Schrödinger este

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi(x)}{\mathrm{d}x^2}+\frac{2m}{\hbar^2}(E-\frac{1}{2}m\omega^2x^2)\psi(x)=0 \quad (13.56)$$

Introducând notaţiile:

$$A=\frac{2mE}{\hbar^2},B=\frac{m\omega}{h}=\frac{m\upsilon}{\hbar} \quad (13.57)$$

ecuaţia (13.56) devine

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+(A-B^2x^2)\psi=0 \qquad (13.58)$$

Efectuând schimbarea de variabilă

$$\xi=\sqrt{B}x \qquad (13.59)$$

ecuaţia (13.58) devine

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}\xi^2}+(\frac{A}{B}-\xi^2)\psi=0 \qquad (13.60)$$

Pe de altă parte se cunoaşte că o ecuaţie de forma

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}\xi^2}+(2n+1-\xi^2)\psi=0,\ n=0,1,2.... \qquad (13.61)$$

are soluţii de forma

$$\psi_n=C_nH_n(\xi)e^{-\frac{1}{2}\xi^2} \qquad (13.62)$$

$$\text{unde } H_n(\xi)=(-1)^n e^{\xi^2}\frac{\mathrm{d}^n e^{-\xi^2}}{\mathrm{d}\xi^n} \qquad (13.63)$$

poartă numele de polinoamele lui Hermite.

Ecuaţia (13.60) va avea soluţii continue şi univoce de tipul (13.62) numai în cazul când:

$$\frac{A}{B}=2n+1 \qquad (13.64)$$

Înlocuin în (13.64) expresiile lui A şi B din (13.57) se găseşte

$$E=(n+\frac{1}{2})h\nu,\ n=0,1,\ 2,\ \ldots \qquad (13.65)$$

Din (13.65) se observă că nivelele energetice ale oscilatorului liniar armonic formează un şir discret şi sunt echidistante. De asemenea se observă că energia minimă a oscilatorului armonic (numită energie de zero) este

$$E_0=\frac{1}{2}h\nu \qquad (13.66)$$

Constanta C_M din (13.62) se determină din condiţia de normare

adnotaţii……

adnotaţii …..

$$\int \psi_n \cdot \psi_n^* \, \mathrm{d}\xi = C_n^2 \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(\xi) H_n(\xi) e^{-\xi^2} \, \mathrm{d}\xi = (-1)^n C_n^2 \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(\xi) \frac{\mathrm{d}^n e^{-\xi^2}}{\mathrm{d}\xi^n} \mathrm{d}\xi = 1 \tag{13.67}$$

Integrând prin părţi se obţine

$$C_n = \frac{1}{\sqrt{2^n \cdot n! \sqrt{\pi} \left(\frac{\hbar}{m\omega} \right)^{\frac{1}{2}}}} = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi} x_0}} \tag{13.68}$$

(13.69)

Din (13.62) şi (13.68), se găseşte

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi} x_0}} H_n(\xi) e^{-\frac{1}{2}\xi^2} \tag{13.70}$$

În figura 13.7 sunt reprezentate: curba energiei potenţiale $U(x = \frac{Kx^2}{2})$, nivelele energetice $E = (n + \frac{1}{2})4\nu$, şi densităţile de probabilitate pentru diferite stări energetice $|\psi_n|^2$

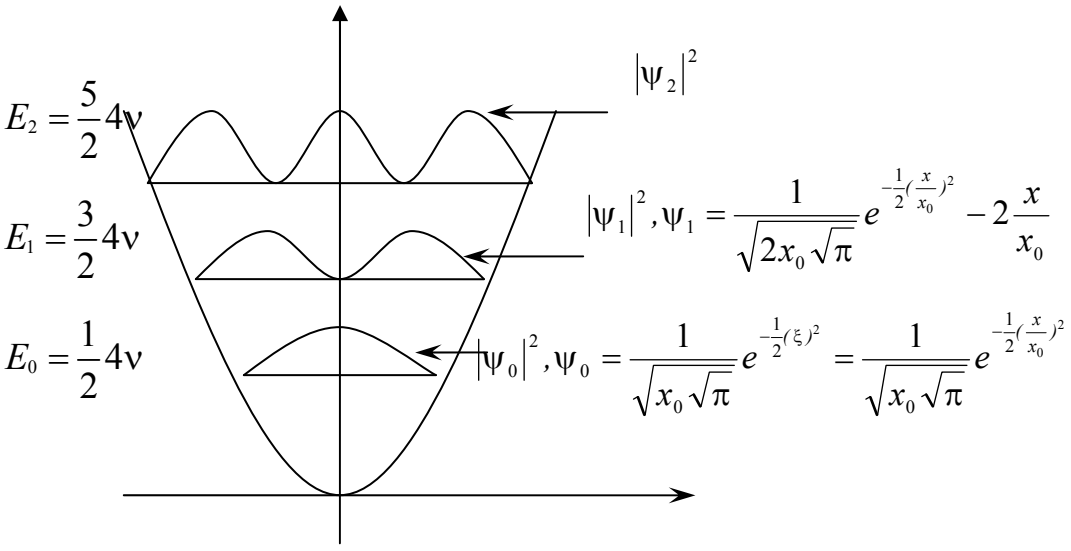

$E_2 = \frac{5}{2}4\nu$
$E_1 = \frac{3}{2}4\nu$
$E_0 = \frac{1}{2}4\nu$
$|\psi_2|^2$
$|\psi_1|^2, \psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2x_0\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{x_0})^2} - 2\frac{x}{x_0}$
$|\psi_0|^2, \psi_0 = \frac{1}{\sqrt{x_0\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{1}{2}(\xi)^2} = \frac{1}{\sqrt{x_0\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{x_0})^2}$

Figura 13.7. Graficul mărimilor $U(x)$, E, şi $|\psi_n|^2$ pentru oscilatorul liniar armonic.

Observaţie. Modelul oscilatorului liniar armonic poate fi aplicat la studiul vibraţiilor moleculelor biatomice şi anume la vibraţiile pe care le execută cei doi atomi de-a lungul axei intermoleculare. Să presupunem că fiecare dintre cei doi atomi are o mişcare oscilatorie armonică. Vom arăta că în acest caz

mişcarea lor se poate reduce la mişcarea oscilatorie armonică a unui singur punct material îjn jurul poziţiei de echilibru, adică vibraţiile atomilor se pot reduce la modelul oscilatorului liniar armonic.

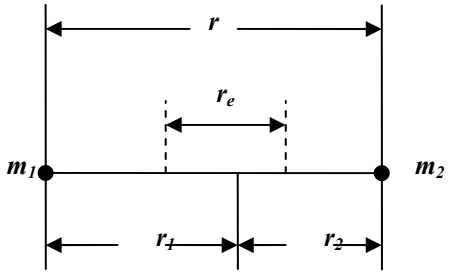


Figura 13.8. Molecula biatomică

Notând cu r distanţa momentană dintre cei doi atomi şi cu re distanţa de echilibru, se observă că elongaţiei îi corespunde r-re (figura 13.8), astfel încât pentru fiecare dintre atomi putem scrie:

$$m_1 \frac{\mathrm{d}^2 r_1}{\mathrm{d}t^2} = -K(r - r_e) \qquad (13.71)$$

$$m_2 \frac{\mathrm{d}^2 V_2}{\mathrm{d}t^2} = -K(r - r_e)$$

Pe de altă parte sunt cunoscute relaţiile:

$$r_1 + r_2 = r\ ,\ m_1 r_1 = m_2 r_2 \qquad (13.72)$$

din care se obţine:

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r, r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} r \qquad (13.73)$$

Ţinând seama de (13.73) cele două ecuaţii (13.71) capătă aceeaşi formă

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = -K(r - r_e) \qquad (13.74)$$

Deoarece r_e este o constantă, ecuaţia (13.74) se mai poate scrie

$$m \frac{\mathrm{d}^2 (r - r_e)}{\mathrm{d}t^2} = -K(r - r_e) \qquad (13.75)$$

adnotaţii……

adnotaţii …..

Ecuaţia (13.75) este ecuaţia de mişcare a unui oscilator armonic cu masa $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ care este masa redusă a moleculei biatomice. Rezultatele obţinute în mecanica cuantică pentru oscilatorul liniar armonic pot fi deci aplicate vibraţiilor moleculei biatomice.

13.2.5 Atomul de hidrogen şi ionii hidrogenoizi.

Un sistem format dintr-un nucleu fix încărcat cu sarcina electrică +Ze şi un singur electron (cu sarcina –e) reprezintă un atom monoelectronic. Dacă Z=1 atunci avem de a face cu atomul de hidrogen, dacă Z=2 atunci este vorba de heliul o dată ionizat.

Fie r distanţa dintre nucleu şi electron (Figura 13.9).

Energia potenţială a electronului în câmpul columbian al nucleului este

$$U(r) = \int F \cdot \mathrm{d}r = \int \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \mathrm{d}r = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon r} \qquad (13.76)$$

Ecuaţia lui Schrödinger este

$$\Delta\psi(\vec{r}) + \frac{2m}{\hbar^2}[E - U(r)]\psi(\vec{r}) = 0 \qquad (13.77)$$

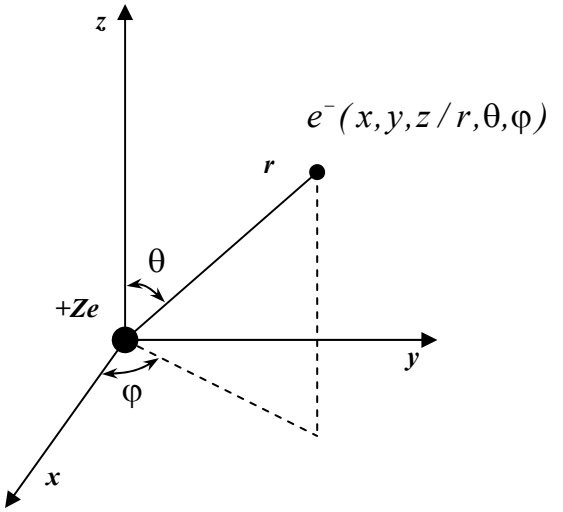


Figura 13.9. Molecula biatomică

Având în vedere simetria sistemului (figura 13.9), studiul acestuia este mai indicată în coordonate sferice (r, θ, φ) care sunt legate de coordonatele carteziene (x, y, z) prin relaţiile:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi\,,\ y = r\sin\theta\sin\varphi\,,\ z = r\cos\theta \qquad (13.78)$$

adnotaţii……

În acest fel $\psi(\vec{r}) = \psi(r,\theta,\varphi)$ (13.79)

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}] \quad (13.80)$$

În acest fel ecuaţia (13.77) devine:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\psi(r,\theta,\varphi)}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi(r,\theta,\varphi)}{\partial\varphi^2}] + + \frac{2m}{\hbar^2}[E - U(r)]\psi(r,\theta,\varphi) = 0 \quad (13.81)$$

Şi în acest caz condiţia de normare este

$$\int \psi\psi^* \,\mathrm{d}V = 1 \quad (13.82)$$

Se caută soluţia (13.79) a ecuaţiei (13.82) sub forma

$$\psi(r,\theta,\varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi) \quad (13.83)$$

Procedând în acest mod ecuaţia (13.81) se descompune în trei ecuaţii de forma

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}r} + \frac{2m}{\hbar^2}(E + \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r})R = \frac{e(e+1)}{r^2} \quad (13.84)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}\theta^2} + ctg\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta} + e(e+1)\Theta - \frac{m}{\sin^2\theta}\Theta = 0 \quad (13.85)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}\varphi^2} + \sin^2\phi = 0 \quad (13.86)$$

Deci rezolvarea ecuaţiei lui Schrödinger pentru un atom monoelectronic revine la rezolvarea a trei ecuaţii diferenţiale (13.84), (13.85) şi (13.86).

Condiţia de normare (13.82) pentru funcţia de undă $\psi(r,\theta,\varphi)$ poate fi aplicată fiecăreia dintre funcţiile R, Θ, Φ adică

$$\int_0^\infty RR^* r^2 \,\mathrm{d}r = 1 \quad (13.87)$$

$$\int_0^\pi \Theta\Theta^* \sin\theta \,\mathrm{d}\theta -- = 1 \quad (13.88)$$

$$\int_0^{2\pi} \phi\phi^2 \,\mathrm{d}\varphi = 1 \quad (13.89)$$

adnotaţii …..

Rezolvarea ecuaţiilor de mai sus necesită calcule complexe deşi aceste ecuaţii sunt pentru cele mai simple sisteme cuantice – atomii hidrogenoizi. În continuare ne vom restrânge doar la unele calcule strict necesare prezentării aspectelor principale ale problemei.

Se va începe cu rezolvarea celei mai simple dintre ecuaţiile de normare şi anume cu (13.89). Soluţia acestei ecuaţii se constă sub forma $\phi(\varphi) = ce^{im\varphi}$. Pentru ca funcţia $\phi(\varphi)$ să reprezinte o anumită stare pentru un unghi dat φ trebuie să ia aceleaşi valori pentru φ, $\varphi + 2\pi$, $\varphi + 4\pi$ etc.

Deci

$$e^{im\varphi} = e^{im(\varphi+2\pi)} \tag{13.90}$$

Aceasta înseamnă că mărimea nu poate lua doar valorile

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{13.91}$$

Mărimea m poartă numele de număr cuantic magnetic.

Condiţia de normare (13.89) este

$$c^2 \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{im\varphi} \cdot \mathrm{e}^{-im\varphi}\, \mathrm{d}\varphi = c^2 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = 2\pi c^2 = 1 \tag{13.92}$$

care duce la

$$c = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tag{13.93}$$

Deci funcţia de undă capătă expresia

$$\psi_n(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{im\varphi} \tag{13.94}$$

Cuantificarea (13.91) apare deci ca o necesitate care trebuie îndeplinită pentru ca soluţiile ecuaţiei (13.89) să satisfacă condiţiile fizice şi matematice impuse de problemă.

Rezolvarea ecuaţiei (13.88) impune condiţia ca mărimea l, numită număr cuantic orbital, să aibă următoarele valori

$$l = 0, 1, 2, 3, \ldots \text{ cu } l \geq m \tag{13.95}$$

Analog, rezolvarea ecuaţiei (13.87), căreia i se impun condiţiile (13.91) şi (13.95) pentru m şi l conduce la valorile proprii ale energiei atomului hidrogenoid

$$E_n = -\frac{m_e z^2 e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} \cdot \frac{1}{n^2} \qquad (13.96)$$

În (13.96) mărimea n poartă numele de număr cuantic principal şi poate lua valorile

$$n = 1,2,3,\ldots \text{ cu } n \geq l+1 \qquad (13.97)$$

Deci energia atomilor hidrogenoizi este cuantificată de numărul cuantic principal n iar funcţia de undă $\psi(r,\theta,\varphi) = R(r)$ care descrie stările cuantice ale electronului în atomii hidrogenoizi, depinde de trei numere cuantice:

-numărul cuantic principal $n = 1,2,3,\ldots$

-numărul cuantic orbital $l = 0,1,2,3,\ldots,n-1$

-numărul cuantic magnetic (orbital) $m = -l,\ldots,0,\ldots,+l$

Aceasta înseamnă că pentru un n dat (pentru o valoare a energiei) corespund mai multe funcţii proprii liniar independente, adică corespund mai multe stări. Rezultă că stările electronului în atomii hidrogenoizi sunt degenerate. Gradul de degenerare este dat de

$$g_n = \sum_{l=0}^{n-1} 2(2l+1) = 2n^2 \qquad (13.98)$$

Deci un nivel energetic al atomului (n dat) va fi populat cu $2n^2$ electroni.

BIBLIOGRAFIE

[1] ***Inţa***, I.; ***Dumitru***, S., (1982), *Complemente de fizică*, Bucureşti, Editura Tehnică

[2] ***Ţiţeica,*** Ş.; (1984), *Mecanica cuantică*, Bucureşti, Edit. Acad. R.S.R.

[3] ***Luca***, E.; ***Ciubotariu***, C.; ***Zet***, Gh.; ***Vasiliu***, A., (1986), *Fizică*, Bucureşti, Editura Didactică şi Pedagogică

[4] ***Healey,*** R.***,*** (1995), *Filosofia mecanicii cuantice*, Bucureşti, Editura Tehnică

[5] ***Barsden*** B.H., ***Joachim,*** C.J.***,*** (1995), *Introducere în mecanica cuantică, Bucureşti*, Editura Tehnică.

[6] ***Simaciu,*** I., (1998), *Mecanica cuantică*, Ploieşti, Editura Universităţii Petrol-Gaze Ploieşti

✍ adnotaţii……

ANEXE

Cuprins Anexe

ANEXA 1. 243
13. VECTORI ŞI OPERAŢII CU VECTORI 243
13.1 Introducere. Clasificare 243
13.2 Operaţii de adunare şi scădere 244
13.2.1 Adunarea vectorilor 244
13.2.2 Scăderea vectorilor 246
13.2.3 Descompunerea vectorilor 246
13.3 Operaţii de înmulţire 247
13.3.1 Produsul unui vector cu un scalar. 247
13.3.2 Produsul scalar a doi vectori. 247
13.3.3 Produsul vectorial a doi vectori 248
13.3.4 Produsul mixt a trei vectori 250
13.3.5 Dublul produs vectorial a trei vectori 250
13.4 Operaţii de derivare şi integrare 250
13.4.1 Derivarea unui vector 250
13.4.2 Integrarea unui vector 251
13.4.3 Gradientul unei funcţii scalare 252
13.4.4 Divergenţa unui vector 253
13.4.5 Rotorul unui vector 254
13.5 Formule vectoriale 255
13.6 Teoreme de calcul vectorial 255
ANEXA 2. 257
14. PROBLEME PROPUSE CU REZULTATE 257
R_1 271
ANEXA 3 311
LUCRĂRI DE LABORATOR 311

adnotaţii……

ANEXA 1.

13. VECTORI ŞI OPERAŢII CU VECTORI

13.1 Introducere. Clasificare

Fenomene fizice pot fi caracterizate cu ajutorul mărimilor fizice care pot fi împărţite în următoarele categorii: mărimi scalare, mărimi vectoriale şi mărimi tensoriale.

Mărimile scalare sunt acele mărimi care sunt complet definite de valoarea lor (exprimate printr-un număr care depinde numai de unităţile de măsură alese). Exemple de mărimi scalare sunt: masa, densitatea, timpul, intensitatea curentului electric, temperatura, etc.

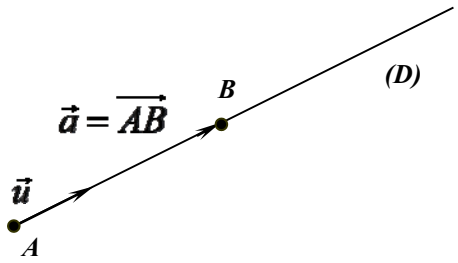


Figura 13.1

Mărimile vectoriale sunt mărimi care nu mai pot fi caracterizate printr-un singur număr ci prin mai multe (numărul acestora fiind egal cu numărul de dimensiuni ale spaţiului în care acţionează). În spaţiul tridimensional mărimile vectoriale sunt caracterizate pin trei numere care implică următoarele caracteristici:

punct de aplicaţie

modul,

direcţie,

sens.

adnotaţii …..

Exemple de mărimi fizice vectoriale, viteza, forţa, momentul cinetic, densitatea curentului electric, inducţia câmpului magnetic etc. Aceste mărimi pot fi reprezentate geometric printr-un segment orientat (fig. 13.1.). Punctul A reprezintă originea sau punctul de aplicaţie a vectorului $\vec{v} = A\vec{B}$, punctul B reprezintă extremitatea vectorului, lungimea, lungimea segmentului AB reprezintă o valoare numerică asociată mărimii fizice vectoriale şi poartă numele de modulul vectorului $\vec{a}$ (mod $\vec{a} = a = |\vec{a}|$), direcţia suportului (D) al vectorului reprezintă direcţia vectorului $\vec{a} = A\vec{B}$.

Vectorul $\vec{u}$ din fig. 13.1 are valoarea absolută (modulul) egală cu unitatea $\left(|\vec{u}| = 1\right)$ şi poartă numele de vector unitate sau versorul vectorului $\vec{a}$

$$\vec{a} = a\,\vec{u}\,. \qquad (13.1)$$

Vectorii se împart în trei grupe:

vectori liberi, caracterizaţi prin mărime (modulul), direcţie şi sens şi la care originea este arbitrară

vectori legaţi, caracterizaţi prin origine, mărime, direcţie şi sens

vectori alunecători caracterizaţi prin mărime şi sens având ca dreapta suport o direcţie bine precizată

13.2 Operaţii de adunare şi scădere

13.2.1 Adunarea vectorilor

Fie doi vectori $\vec{a}$ şi $\vec{b}$. Prin adunarea (compunerea, suma vectorială) vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ se obţine un vector $\vec{c}$

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}\,. \qquad (13.2)$$

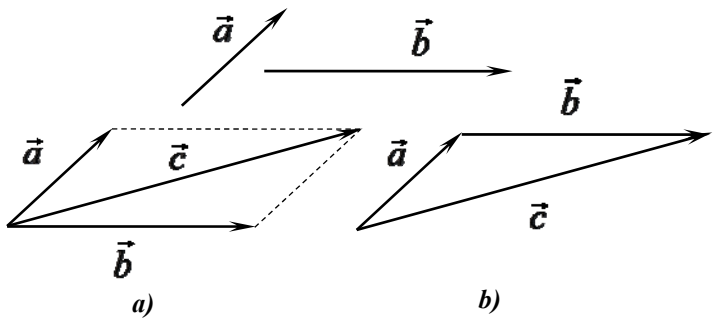


Figura 13.2

adnotaţii……

Mărimea, direcţia şi sensul vectorului $\vec{c}$ se obţine prin regula paralelogramului (fig. 13.2a) sau prin regula triunghiului (fig. 13.2a).

Cunoscând modulele vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ (adică a şi b) putem afla modulul vectorului . $\vec{c}$ prin teorema lui Pitagora generalizată

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}\,. \qquad (13.3)$$

Faţă de un reper cartezian ortogonal tridimensional, un vector oarecare $\vec{a}$ poate fi exprimat prin suma a trei vectori care au ca direcţii direcţiile axelor de coordonate ale reperului

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\,. \qquad (13.4)$$

În expresia (13.4) $\vec{a}_x, \vec{a}_y$ şi $\vec{a}_z$ reprezintă proiecţiile vectorului $\vec{a}$ pe axele respectiv Ox, Oy, şi Oz iar $\vec{i}$, $\vec{j}$ şi $\vec{k}$ sunt versorii ataşaţi axelor de coordonate.

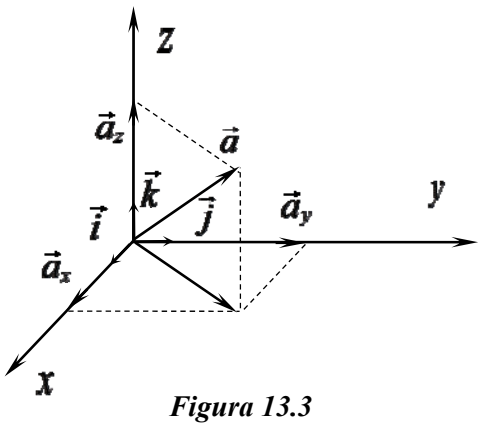


Figura 13.3

Modulul vectorului $\vec{a}$ poate fi exprimat astfel prin componentele sale:

$$|\vec{a}| = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}\quad . \qquad (13.5)$$

Sub formă analitică , suma a doi vectori se exprimă prin relaţia :

$$\begin{aligned}\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} &= (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) + (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) = \\ &= (a_x + b_x)\vec{i} + (a_y + b_y)\vec{j} + (a_z + b_z)\vec{k}.\end{aligned} \qquad (13.6)$$

Proprietăţile adunării vectorilor sunt :

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (Comutativitate)

adnotaţii .....

$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{d})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{d}$ (asociativitate)

$m(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=m\vec{a}+m\vec{b}+m\vec{c}$ (distributivitate)

13.2.2 Scăderea vectorilor

Diferenţa a doi vectori $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ este un vector $\vec{d}$

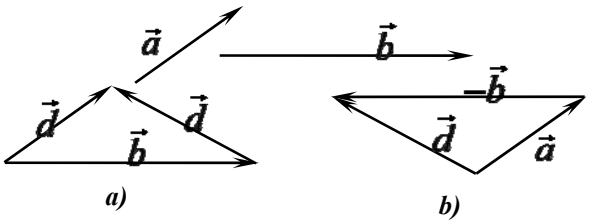


Figura 13.4

$$\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})\,. \qquad (13.7)$$

Diferenţa $\vec{a}-\vec{b}$ se obţine adunând după regula triunghiului vectorul $\vec{a}$ cu vectorul $-\vec{b}$ adică cu un vector egal şi de sens contrar cu vectorul $\vec{b}$

Sub formă analitică , diferenţa vectorilor are expresia:

$$\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})-(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})= \\ =(a_x-b_x)\vec{i}+(a_y-b_y)\vec{j}+(a_z-b_z)\vec{k}. \qquad (13.8)$$

13.2.3 Descompunerea vectorilor

Descompunerea vectorilor este o operaţie inversă compunerii (adunării) vectorilor. În fig.13.5. este reprezentată descompunerea vectorului $\vec{c}$ în doi

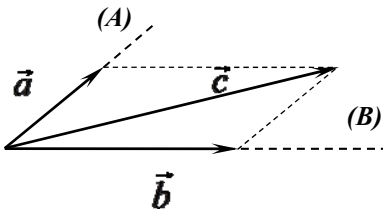


Figura 13.5

vectori $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ situaţi pe direcţiile (A) şi (B). Se poate scrie

adnotaţii……

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} . \qquad (13.9)$$

Dacă un vector $\vec{a}$ se descompune după trei axe ortogonale (fig.13.3.) atunci se poate scrie expresia (13.4.)

13.3 Operaţii de înmulţire

13.3.1 Produsul unui vector cu un scalar.

Produsul unui vector $\vec{a}$ cu un scalar λ este un vector $\vec{b}$

$$\vec{b} = \lambda\vec{a} = \vec{a}\lambda, \left|\vec{b}\right| = \lambda\left|\vec{a}\right| . \qquad (13.10)$$

Orientarea vectorului $\vec{b}$ este reprezentată în fig.13.6.

Exemple:

- impulsul $\vec{p}$ al unui corp cu masa m şi viteza $\vec{v}$, $\vec{p} = m\vec{v}$
- forţa $\vec{F}$ care acţionează asupra unei sarcini aflată într-un câmp electric $\vec{E}$, $\vec{F} = q\vec{E}$

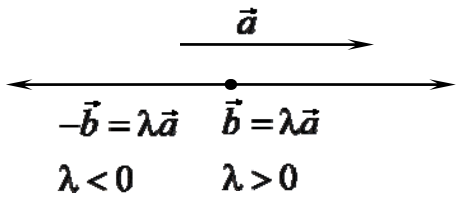


Figura 13.6

13.3.2 Produsul scalar a doi vectori.

Produsul scalar a doi vectori prin definiţie este un scalar dat de produsul modulelor şi cosinusul unghiului format de cei doi vectori.

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = ab\cos\alpha , \qquad (13.11)$$

sau

$$\vec{a} \circ \vec{b} = apr_{\vec{a}\vec{b}} = bpr_{\vec{b}\vec{a}} , \qquad (13.12)$$

unde $b\cos\alpha = a \cdot pr_{\vec{a},\vec{b}}$ este proiecţia vectorului $\vec{b}$ pe direcţia vectorului $\vec{a}$ iar $a\cos\alpha = pr_{\vec{b}\vec{a}}$ este proiecţia vectorului $\vec{a}$ pe direcţia vectorului $\vec{b}$.

adnotaţii ……..

Sub formă analitică , produsul scalar se exprimă astfel

$$\vec{a} \circ \vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z \,, \quad (13.13)$$

deoarece

$$(\vec{i} \cdot \vec{i}) = (\vec{j} \cdot \vec{j}) = (\vec{k} \cdot \vec{k}) = 1 \cdot \cos 0^o = 0 \,,$$

$$(\vec{i} \cdot \vec{j}) = (\vec{j} \cdot \vec{k}) = (\vec{k} \cdot \vec{i}) = 1 \cdot \cos 90^o = 0 \,.$$

Proprietăţile produsului scalar a doi vectori sunt :

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (comutativitate)

$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ (distributivitate în raport cu adunare vectorilor).

Exemple:

- lucrul mecanic L efectuat de o forţă constantă $\vec{F}$ care acţionează asupra unui corp , îşi deplasează punctul de aplicaţie pe direcţia $\vec{d}$ este dată de relaţia, $L = \vec{F} \cdot \vec{d} = F\,\mathrm{d}\cos(\vec{F}, \vec{d})$.
- fluxul unui câmp magnetic, caracterizat prin vectorul $\vec{B}$, printr-o suprafaţă S , $\Phi = \int_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$

13.3.3 Produsul vectorial a doi vectori

Produsul vectorial a doi vectori $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ este un vector

$$\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b} \,, \quad (13.14)$$

care are modulul $\left|\vec{d}\right| = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin(\vec{a}, \vec{b})$, direcţia perpendiculară pe planul format de vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ şi sensul dat de sensul de înaintare a unui burghiu aşezat pe direcţia vectorului $\vec{d}$ şi rotit de la vectorul $\vec{a}$ spre vectorul $\vec{b}$ cu unghiul cel mai mic (fig.13.7.)

adnotaţii……

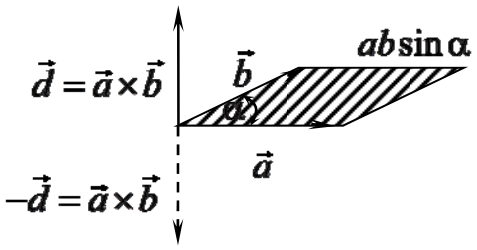


Figura 13.7

Se observă că valoarea vectorului $\left|\vec{d}\right| = ab\sin\alpha$ este numeric egală cu aria paralelogramului construit cu vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$.(fig.13.7.)

Expresia produsului vectorial se poate scrie sub forma :

$$\vec{d} = \vec{a}\times\vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})\times(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) =$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k} =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \qquad (13.15)$$

Scrierea produsului vectorial sub forma unui determinant este posibilă deoarece avem următoarele relaţii între versorii $\vec{i}$, $\vec{j}$ şi $\vec{k}$:

$\vec{i}\times\vec{i} = 0$, $\vec{j}\times\vec{j} = 0$, $\vec{k}\times\vec{k} = 0$ $(\sin(\vec{i},\vec{i}) = \sin(\vec{i},\vec{i}) = \sin(\vec{i},\vec{i}) = 0)$

$\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j}\times\vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k}\times\vec{i} = \vec{j}$ $(\sin(\vec{i},\vec{j}) = \sin(\vec{i},\vec{k}) = \sin(\vec{j},\vec{k}) = 1)$

Proprietăţile produsului vectorial a doi vectori sunt:

$\vec{a}\times\vec{b} = -\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)$ (anticomutivitate)

$\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c}$ (distributivitate în raport cu adunarea vectorilor)

Exemple:

- momentul $\vec{M}$ al unei forţe $\vec{F}$ faţă de u punct „O” este $\vec{M} = \vec{r}\times\vec{F}$, unde $\vec{r}$ este vectorul de poziţie al vectorului $\vec{F}$ faţă de punctul „O”.
- momentul cinetic al unui punct material faţă de un punct $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} = \vec{r}\times m\vec{v}$, unde $\vec{r}$ este vectorul de poziţie, m masa iar $\vec{v}$ reprezintă viteza punctului material;

adnotaţii …..

- forţa Lorentz, adică forţa ce acţionează asupra unei sarcini electrice q ce are viteza $\vec{v}$ într-un câmp magnetic cu inducţia $\vec{B}$, $\vec{F} = q\left(\vec{v} \times \vec{B}\right)$

13.3.4 Produsul mixt a trei vectori

Produsul mixt a trei vectori $\vec{a}$, $\vec{b}$ şi $\vec{c}$ este produsul scalar dintre unul din vectori şi produsul vectorial al celorlalţi doi reprezentând un scalar:

$$\vec{a}\left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{c}\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \vec{b}\left(\vec{c} \times \vec{a}\right) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & b_z \end{vmatrix}. \qquad (13.16)$$

13.3.5 Dublul produs vectorial a trei vectori

Dublul produs vectorial a trei vectori $\vec{a}$, $\vec{b}$ şi $\vec{c}$ este un vector $\vec{d}$ dat de următoarea expresie

$$\vec{d} = \vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b}\left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right) - \vec{c}\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right). \qquad (13.17)$$

13.4 Operaţii de derivare şi integrare

13.4.1 Derivarea unui vector

Un vector $\vec{a}$ a cărui mărime depinde de variabila t reprezintă o funcţie vectorială $\vec{a} = \vec{a}(t)$. Această funcţie este derivabilă în raport cu t dacă există limita

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{a}(t)}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{a}) = \dot{\vec{a}}, \qquad (13.18)$$

unde $\dot{\vec{a}}$-reprezintă o notaţie des utilizată pentru a reprezenta derivata unei mărimi fizice în raport cu timpul.

Diferenţiala vectorului $\vec{a}(t)$ este

$$\mathrm{d}\vec{a} = \vec{a}(t)\mathrm{d}t. \qquad (13.19)$$

Se demonstrează următoarele formule de derivare

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \dot{\vec{a}} + \dot{\vec{b}}, \qquad (13.20)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\lambda\vec{a}\right)=\dot{\lambda}\vec{a}+\lambda\dot{\vec{a}}\,,\ (\lambda=\lambda(t)) \qquad (13.21)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=\dot{\vec{a}}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\dot{\vec{b}}\,. \qquad (13.22)$$

Observaţie:

Dacă vectorul $\vec{a}$ este constant în modul $|\vec{a}|=ct.$ atunci,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{a}\cdot\vec{a}\right)=\dot{\vec{a}}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\dot{\vec{a}}=2\vec{a}\cdot\dot{\vec{a}}=|\vec{a}||\dot{\vec{a}}|\cos\left(\vec{a},\dot{\vec{a}}\right) \qquad (13.23)$$

pe de o parte, iar pe de altă parte,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{a}\cdot\vec{a}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(a^2\right)=0\,. \qquad (13.24)$$

Din cele două relaţii (13.23, 13.14) rezultă că $\cos\left(\vec{a},\dot{\vec{a}}\right)=0$ cea ce înseamnă că vectorul derivată a unui vector constant în modul este perpendicular pe vectorul iniţial ($\vec{a}\perp\dot{\vec{a}}$).

Alte proprietăţi sunt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\dot{\vec{a}}\times\vec{b}+\vec{a}\times\dot{\vec{b}}\,, \qquad (13.25)$$

derivata unui produs vectorial

$$\frac{\mathrm{d}\,\vec{a}\left(u(t)\right)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\,\vec{a}}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\dot{u}\cdot\frac{\mathrm{d}\,\vec{a}}{\mathrm{d}u}\,, \qquad (13.26)$$

derivata unui vector în raport cu timpul dacă acest vector depinde de timp indirect, prin intermediul funcţiei $u(t)$.

13.4.2 Integrarea unui vector

Integrala unei mărimi vectoriale se reduce le integrarea unor funcţii scalare reprezentând componentele vectorului în raport cu un sistem de axe de coordonate

$$\vec{I}(t)=\int_{t_0}^{t}\vec{a}(t)\,\mathrm{d}t=\vec{i}\int_{t_0}^{t}a_x(t)\,\mathrm{d}t+\vec{j}\int_{t_0}^{t}a_y(t)\,\mathrm{d}t+\vec{k}\int_{t_0}^{t}a_k(t)\,\mathrm{d}t\,. \qquad (13.27)$$

adnotaţii……

adnotaţii …..

13.4.3 Gradientul unei funcţii scalare

Multe fenomene fizice sunt descrise matematic cu ajutorul unor operatori cum ar fi gradientul, rotorul sau divergenţa. Aceşti operatori pot fi reprezentaţi cu ajutorul unui singure simbol şi anume operatorul „nabla”.

Să considerăm un spaţiu tridimensional metric în care poziţia unui punct material se poate caracteriza prin vectorul de poziţie $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Dacă vom considera o funcţie dependentă de coordonate $V = V(x, y, z)$ atunci gradientul acestei funcţii va fi un vector definit prin

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} V = \vec{G} = \frac{\partial V}{\partial \vec{r}} = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \vec{y} + \frac{\partial V}{\partial z} \cdot \vec{k} = \\ = \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{y} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \vec{k} \right) V \equiv \nabla V \end{aligned} \quad . \qquad (13.28)$$

unde prin

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{y} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \vec{k} \, , \qquad (13.29)$$

s-a notat aşa numitul operator „nabla”. Se poate observa că operatorul ∇ transformă un câmp scalar într-un câmp vectorial.

Deoarece vectorul

$$\vec{G} = G_x \cdot \vec{i} + G_y \cdot \vec{j} + G_z \cdot \vec{k} \, . \qquad (13.30)$$

se obţine direct prin identificare componentele vectorului $\vec{G}$:

$$G_x = \frac{\partial V}{\partial x}; G_y = \frac{\partial V}{\partial y}; G_z = \frac{\partial V}{\partial z} \, . \qquad (13.31)$$

Acest operator intervine de exemplu în expresia ce leagă cele două mărimi ce caracterizează un câmp de forţe (una scalară – potenţialul, iar cealaltă vectorială – intensitatea câmpului). În cazul câmpului electric cele două mărimi sunt potenţialul electric V, iar cealaltă mărime intensitatea câmpului electric $\vec{E}$. Relaţia ce leagă cele două mărimi se scrie simplu cu ajutorul operatorului gradient şi anume,

$$\vec{E} = -\nabla V \equiv -\operatorname{grad} V \, . \qquad (13.32)$$

sau explicit

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}; E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}; E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \, . \qquad (13.33)$$

adnotaţii……

Din relaţia (13.33) rezultă că vectorul $\vec{E}$ are componente nenule pe direcţiile pe care funcţia V nu este constantă. Locul geometric al punctelor pentru care funcţia $V(x,y,z)=ct.$ poartă numele de suprafaţă echipotenţială. Din expresia (13.28) rezultă că vectorul gradient este perpendicular pe suprafeţe echipotenţiale.

Alte exemple:

Forţa $\vec{F}$ ce acţionează asupra unui punct material într-un câmp gravitaţional caracterizat prin energia potenţială U, $\vec{F}=-\nabla U$

densitatea curentului termic $\vec{j}_t$ ce se poate exprima în funcţie de temperatura absolută T şi anume $\vec{j}_t=-\lambda\nabla T$, unde λ reprezintă conductivitatea termică a substanţei în punctul în care se calculează $\vec{j}_t$.

13.4.4 Divergenţa unui vector

Un alt operator diferenţial este divergenţa care se aplică unui vector şi ca rezultat se obţine un scalar definit prin relaţia

$$\operatorname{div}\vec{E}=\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}. \qquad (13.34)$$

Dacă vom efectua produsul scalar simbolic între operatorul ∇ şi vectorul $\vec{E}$ se poate reprezenta operatorul divergenţă tot cu ajutorul operatorului ∇ ca şi în cazul gradientului,

$$\nabla\cdot\vec{E}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\cdot\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\cdot\vec{k}\right)\cdot\left(E_x\cdot\vec{i}+E_y\cdot\vec{j}+E_z\cdot\vec{k}\right)=$$

$$=\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}. \qquad (13.35)$$

Astfel putem folosi echivalenţa dintre cele două tipuri de scriere,

$$\operatorname{div}\vec{E}\equiv\nabla\cdot\vec{E}. \qquad (13.36)$$

Exemple

relaţia dintre intensitatea câmpului electric $\vec{E}$ într-un punct şi densitatea volumetrică de sarcină ρ

$$\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=\frac{\rho}{\varepsilon},$$

adnotaţii …..

teorema lui Gauss pentru câmpul electrostatic

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_{V_S} \mathrm{div}\,\vec{E}\cdot \mathrm{d}V\,,$$

conservarea sarcinii electrice (ecuaţia de continuitate)

$$\mathrm{div}\,\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0\,.$$

13.4.5 Rotorul unui vector

Rotor aplicat unui vector prin definiţie este un alt vector având componentele date de relaţia,

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\vec{k}\,. \quad (13.37)$$

Folosind operatorul nabla rotorul unui vector poate fi scris cu ajutorul acestuia folosind operaţia de produs vectorial între operatorul ∇ şi vectorul căruia se aplică rotorul,

$$\nabla \times \vec{E} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\cdot\vec{k}\right)\times\left(E_x\cdot\vec{i} + E_y\cdot\vec{j} + E_z\cdot\vec{k}\right) \equiv \mathrm{rot}\,\vec{E}\,. \quad (13.38)$$

O altă modalitate de scriere este cu ajutorul unui determinant având ca elemente

$$\nabla \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}. \quad (13.39)$$

Exemple:

- un câmp electric variabil în timp generează un câmp electric

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\,,$$

- un curent electric de conducţie având densitatea de curent $\vec{j}$ generează în jurul său un câmp magnetic $\vec{H}$, unde $\nabla \times \vec{H} = \vec{j}$

teorema lui Stokes pentru un câmp vectorial

$$\oint_\Gamma \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{S_\Gamma} \mathrm{rot}\,\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}\,.$$

adnotaţii……

13.5 Formule vectoriale

În cazul operaţiilor cu vectori se pot aplica următoarele formule vectoriale (Ψ este o funcţie scalară, iar $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ şi $\vec{d}$ sunt funcţii vectoriale):

a) $\vec{a}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\vec{c}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\vec{b}\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)$

b) $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\vec{b}\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)-\vec{c}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$

c) $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{c}\times\vec{d}\right)=\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\left(\vec{b}\cdot\vec{d}\right)-\left(\vec{a}\cdot\vec{d}\right)\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)$

d) $\nabla\times\nabla\Psi=0$

e) $\nabla\cdot\left(\nabla\times\vec{a}\right)=0$

f) $\nabla\times\left(\nabla\times\vec{a}\right)=\nabla\left(\nabla\cdot\vec{a}\right)-\nabla^2\vec{a}$

g) $\nabla\cdot\Psi\vec{a}=\vec{a}\cdot\nabla\Psi+\Psi\nabla\cdot\vec{a}$

h) $\nabla\times\Psi\vec{a}=\nabla\Psi\times\vec{a}+\Psi\nabla\times\vec{a}$

i) $\nabla\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=\left(\vec{a}\cdot\nabla\right)\vec{b}+\left(\vec{b}\cdot\nabla\right)\vec{a}+\vec{a}\times\left(\nabla\times\vec{b}\right)+\vec{b}\times\left(\nabla\times\vec{a}\right)$

j) $\nabla\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\vec{b}\cdot\left(\nabla\times\vec{a}\right)-\vec{a}\cdot\left(\nabla\times\vec{b}\right)$

k) $\nabla\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\vec{a}\left(\nabla\cdot\vec{b}\right)-\vec{b}\left(\nabla\cdot\vec{a}\right)+\left(\vec{b}\cdot\nabla\right)\vec{a}-\left(\vec{a}\cdot\nabla\right)\vec{b}$

13.6 Teoreme de calcul vectorial

Să considerăm o funcţie vectorială $\vec{E}$ respectiv o funcţie scalară Ψ, o zonă a spaţiului tridimensional de volum V_S delimitat de o suprafaţă închisă S. Dacă definim $\mathrm{d}\vec{S}=\vec{n}\,\mathrm{d}S$ unde $\vec{n}$ este normala la elementul de suprafaţă atunci avem următoarele identităţi:

a) $\oint\limits_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\int\limits_{V_S}\nabla\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}V$ (formula Gauss-Ostrogradski)

b) $\oint\limits_S \Psi\vec{n}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\int\limits_{V_S}\nabla\Psi\,\mathrm{d}V$

adnotaţii ……

c) $\oint_S \vec{n} \times \vec{E}\, \mathrm{d}S = \int_{V_S} \nabla \times \vec{E} \cdot \mathrm{d}V$

Dacă vom considera un contur închis Γ şi o suprafaţă deschisă S_Γ care se sprijină pe această suprafaţă atunci putem scrie:

a) $\oint_\Gamma \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{S_\Gamma} \nabla \times \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$ (formula lui Stokes)

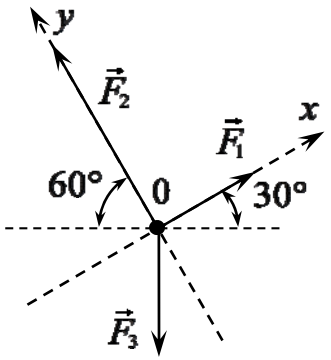
b) $\oint_\Gamma \Psi\, \mathrm{d}\vec{l} = \int_{S_\Gamma} \vec{n} \times \nabla\Psi \cdot \mathrm{d}S$

adnotaţii……

ANEXA 2.

14. PROBLEME PROPUSE CU REZULTATE

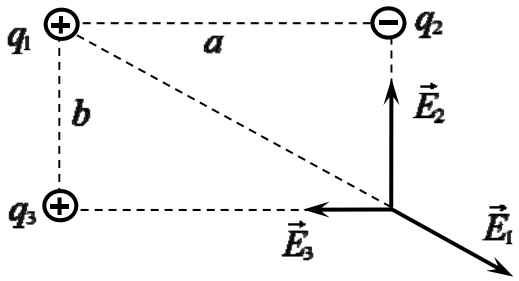
1. Trei forţe acţionează asupra unui punct material, ca în figura de mai jos, având modulele $\left|\vec{F}_1\right| = 20\,\mathrm{N}$, $\left|\vec{F}_2\right| = 60\,\mathrm{N}$ şi $\left|\vec{F}_3\right| = 40\,\mathrm{N}$. Unghiurile dintre aceste forţe şi direcţia orizontală este indicată în figură. Să se calculeze modulul rezultantei $\left|\vec{R}\right|$ celor trei vectori prin două metode: prin aplicarea succesivă a regulii paralelogramului şi prin aplicarea metodei analitice (descompunerea vectorilor de a lungul unor direcţii reciproc perpendiculare convenabil alese – sistemul de axe este convenabil ales dacă este necesară descompunerea a cât mai puţini vectori).



Rezultat: $\left|\vec{R}\right| = 25,36\,\mathrm{N}$

2. Într-o zonă a spaţiului vid este generat un câmp electric de trei sarcini punctiforme având sarcinile $q_1 = 20\,\mu\mathrm{C}$, $q_2 = -20\,\mu\mathrm{C}$ şi $q_3 = 10\,\mu\mathrm{C}$. Dacă sarcinile electrice sunt aşezate în vârfurile unui dreptunghi cu dimensiunile $a = 10\,\mathrm{cm}$ şi $b = 5\,\mathrm{cm}$, ca în figura de mai jos, să se afle intensitatea câmpului electric în al patrulea vârf al dreptunghiului. Reamintim că expresia modulului intensităţii câmpului electric generat de o sarcină punctiformă, în vid, este $E = (1/4\pi\varepsilon_0)(q/r^2) = 9\cdot 10^9 q/r^2$.

adnotaţii …..



Rezultat: $E = 50,32 \cdot 10^6 \dfrac{\text{V}}{\text{m}}$

3. O sursă punctiformă de undă mecanice oscilează după legea $y(t) = 5\sin(50\pi t + \pi/2)[\text{cm}]$ şi generează unde într-un mediu în care viteza de propagare este $v = 3000\,\text{m/s}$. Să se afle:

a) perioada şi frecvenţa oscilaţiilor sursei,

b) lungimea de undă a undei produse,

c) legea de mişcare a unui punct al mediului aflat la distanţa $x = 20\,\text{m}$ de sursă.

Rezultat: a) $T = 0,04\,\text{s}$, $\nu = 25\,\text{Hz}$ **; b) ; c)** $y(t) = 5\sin(50\pi t - \pi/3)[\text{cm}]$ **.**

4. O undă mecanică plană se propagă într-un mediu, fără pierderi, după legea $y(x,t) = 0,2\sin(2\pi t - \pi x)[\text{m}]$. Considerând că sursa se află în originea sistemului de referinţă ales să se afle:

a) frecvenţa, lungimea de undă şi viteza de propagare a undei mecanice,

b) modulul de elasticitate al mediului ştiind că densitatea mediului este $\rho = 3600\,\text{kg/m}^3$,

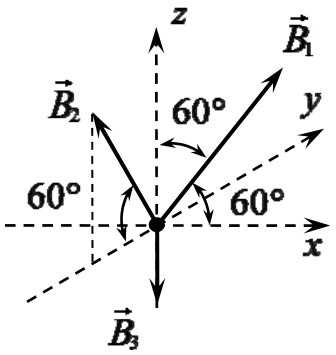
c) legea vitezei pentru oscilaţiile sursei.

Rezultat: a) $T = 0,04\,\text{s}$, $\nu = 25\,\text{Hz}$ **; b)** $\lambda = 120\,\text{m}$ **;**
c) $y(t) = 5\sin(50\pi t - \pi/3)[\text{cm}]$ **.**

5. Să se calculeze inducţia câmpului magnetic rezultant într-un punct al spaţiului în jurul căruia se află trei distribuţii de curenţi electrici. Inducţiile câmpurilor magnetice generate de fiecare distribuţie în parte au modulele

adnotaţii……

$B_1 = 4\,\mathrm{T}$, $B_2 = 2\sqrt{2}\,\mathrm{T}$ şi $B_3 = 1\,\mathrm{T}$. Orientarea vectorilor este indicată în figura de mai jos. Observaţie: având în vedere că suma unghiurilor formate de $\vec{B}_1$ cu axele Ox şi Oz nu este $90°$ vectorul $\vec{B}_1$ nu se află în planul xOz.



Rezultat: $B = 7{,}19\ \mathrm{T}$.

6. Rezultanta a două forţe ($\left|\vec{F}_1\right| = 18\,\mathrm{N}$ şi $\left|\vec{F}_2\right| = 42\,\mathrm{N}$), care acţionează asupra unui corp, este $\left|\vec{R}\right| = 36\,\mathrm{N}$. Ştiind că se inversează sensul celei de a doua forţă, să se calculeze noua rezultantă, $\left|\vec{R}'\right|$, a celor două forţe.

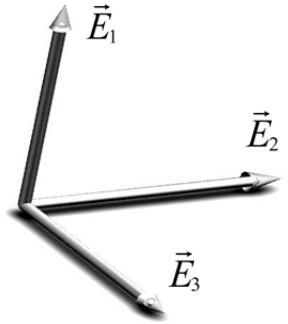
Rezultat: $\left|\vec{R}'\right| = 24\sqrt{5}\,\mathrm{N}$.

7. Trei sarcini electrice generează într-un punct al spaţiului un câmp electric cu vectorii intensitate a câmpului electric reciproc perpendiculari (vezi figura de mai jos). Modulele celor trei intensităţi ale câmpurilor electrice sunt: $\left|\vec{E}_1\right| = 2{,}5\cdot 10^3\ \mathrm{V/m}$, $\left|\vec{E}_2\right| = 2\cdot 10^3\ \mathrm{V/m}$ şi $\left|\vec{E}_3\right| = 3\cdot 10^3\ \mathrm{V/m}$. Să se calculeze:

a) intensitatea câmpului electric total $\vec{E}$ în punctul considerat,

b) unghiul dintre $\vec{E}$ şi $\vec{E}_1$.

adnotaţii …..



Rezultat: a) $E = 5\sqrt{77}\cdot 10^2$ V/m; **b)** $\alpha = \arccos\left(\frac{5}{\sqrt{77}}\right) \simeq 55{,}26^0$.

8. Forţa ce acţionează asupra unui obiect într-un punct aflat la $\vec{r} = -\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}\,(\mathrm{m})$, faţă de originea unui sistem de referinţă dat, este $\vec{F} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}\,(\mathrm{N})$. Cunoscând relaţia de definiţie a momentului forţei faţă de un punct, $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$, să se calculeze momentul forţei date faţă de origine.

Rezultat: $\left|\vec{M}\right| = \sqrt{5}$ Nm.

9. Să se calculeze mărimea (modulul) gradientului pentru un câmp caracterizat prin funcţia scalară $f(x,y,z) = xz - yz + z^2$.

Rezultat: $\left|\mathrm{grad}\, f\right| = \sqrt{2z^2 + (x - y + 2z)^2}$.

10. Să se calculeze divergenţa pentru următorul câmp electrostatic caracterizat prin intensitatea $\vec{E} = (x+y)\vec{i} + 2y\vec{j} + (x+y-2z)\vec{k}$.

Rezultat: $\mathrm{div}\,\vec{E} = 1$.

11. Să se calculeze rotorul pentru următorul câmp electrostatic caracterizat prin intensitatea $\vec{E} = (x+y)\vec{i} + 2y\vec{j} + (x+y-2z)\vec{k}$.

Rezultat: $\mathrm{rot}\,\vec{E} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$.

12. Se consideră vectorii de poziţie pentru trei puncte materiale în funcţie de timp faţă de un sistem de referinţă inerţial prealabil ales: $\vec{r}_1 = -4\vec{i} + t\,\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{r}_2 = -\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ şi $\vec{r}_3 = 4\vec{i} - 2\vec{j} + 2t\,\vec{k}$. Să se determine momentele la care cei trei vectori sunt coplanari.

adnotaţii……

Rezultat: $t_1 = -1\,\text{s}$ **şi** $t_2 = 7\,\text{s}$**.**

13. Se consideră un câmp electromagnetic caracterizat prin amplitudinile $\vec{E}_0 = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}\,(\text{V/m})$ şi $\vec{B}_0 = B_{0x}\vec{i} + 3\cdot 10^{-8}\vec{j} + 2\cdot 10^{-8}\vec{k}\,(\text{T})$ ale vectorilor intensitate a câmpului electric şi inducţia câmpului magnetic faţă de un sistem de referinţă. Ştiind că vectorii $\vec{E}$, $\vec{B}$ şi $\vec{v}$ (viteza de propagare a undei) sunt reciproc perpendiculare, $\vec{B}_0 \times \vec{v} = \vec{E}_0$ şi definiţia indicelui de refracţie, $n = c/v$ (c reprezintă viteza luminii în vid), să se calculeze :

a) valoarea componentei de-a lungul axei Ox a amplitudinii inducţiei câmpului magnetic B_x,

b) componentele vitezei de propagare a undei electromagnetice de-a lungul celor trei axe de coordonate,

c) indicele de refracţie a mediului (viteza de propagare a undei electromagnetice în vid $c = 3\cdot 10^8\,\text{m/s}$).

Rezultat: a) $B_{0x} = -2\cdot 10^{-8}\,\text{T}$**; b)** $v_x = \frac{7}{17}\cdot 10^8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, $v_y = -\frac{2}{17}\cdot 10^8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, $v_z = \frac{10}{17}\cdot 10^8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$**; c)** $n = 4{,}12$**.**

14. O sferă dintr-un material conductor, având raza R=1cm este încărcată cu sarcina $q = 2{,}22\cdot 10^{-10}\,\text{C}$. Să se calculeze:

a) densitatea superficială σ a sarcinii electrice de pe suprafaţa sferei;

b) potenţialul sferei;

c) intensitatea câmpului electric la suprafaţa sferei;

d) potenţialul electrostatic V_1 şi intensitatea câmpului electric E_1 într-un punct P_1 situat la distanţa $R_1 = 1\,\text{m}$ de centrul sferei.

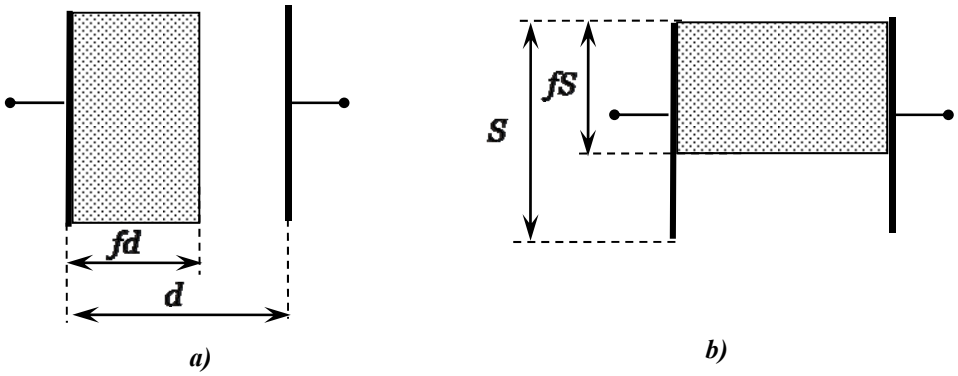
adnotaţii …..

Rezultat: a) $\sigma = 1,7 \cdot 10^{-7} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$ **; b)** $V_S = 2 \cdot 10^2 \text{V}$ **; c)** $E_S = 2 \cdot 10^4 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ **; d)** $V_1 = 2V$ **,** $E_1 = 2 \frac{\text{V}}{\text{m}}$**.**

15. Un condensator plan cu aer are capacitatea C şi sarcina electrică a unei armături q . Ce lucrul mecanic se efectuează pentru triplarea distanţei dintre armăturile condensatorului ?

Rezultat: $L = \frac{q^2}{C}$**.**

16. Spaţiul dintre armăturile unui condensator cu aer ($\varepsilon_{r,aer} \cong 1,00054$) având capacitatea electrică $C_0 = 25\mu\text{F}$ este umplut parţial cu un dielectric (glicerină - $\varepsilon_{r,glicerină} = 40$) având volumul egal cu o fracţiune



$f = 40\%$ din volumul total în două moduri ca în figura **Error! Reference source not found.** În figura de mai jos a) grosimea dielectricului reprezintă o fracţiune f din distanţa dintre armături iar în aceeaşi figură b) suprafaţa dielectricului reprezintă o fracţiune f din suprafaţa unei armături. Să se calculeze:

a) capacitatea condensatorului nou obţinut în cazul a) C_a,

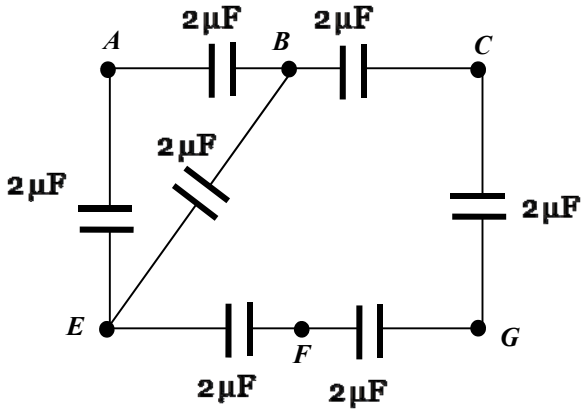
b) capacitatea condensatorului nou obţinut în cazul b) C_b,

c) pentru ce valoare a lui f valoarea raportului dintre cele două capacităţi C_b / C_a este maximă.

Rezultat: fie $n = \frac{\varepsilon_{r,glicerină}}{\varepsilon_{r,aer}} \cong 40$ **a)** $C_a = \frac{C_0}{1 - f + f/n} = 40,98\,\mu\text{F}$**;**

b) $C_b = C_0[1 + f(n-1)] = 0,41\,\text{mF}$**; c)** $f = 50\%$**.**

17. Se consideră gruparea de condensatoare din figura de mai jos cu capacităţile egale $C = 2\,\mu\text{F}$. Să se calculeze capacitatea echivalentă între punctele:



a) E şi G,

b) F şi B,

c) C şi F,

d) E şi C,

e) A şi G.

Rezultat: a) $C_{e(EG)} = 1,75\,\mu\text{F}$**; b)** $C_{e(FB)} = 1,86\,\mu\text{F}$**; c)** $C_{e(CF)} = 1,75\,\mu\text{F}$**; d)** $C_{e(EC)} = 1,86\,\mu\text{F}$**; e)** $C_{e(AG)} = 1,33\,\mu\text{F}$**.**

18. Un condensator plan cu aer $\left(\varepsilon_0 = 8,8 \cdot 10^{-12}\,\text{F/m}\right)$ având suprafaţa unei armături S=2cm2 şi distanţa dintre armături d=1mm este încărcat la o diferenţă de potenţial U=100V. Între armăturile condensatorului decuplat de la sursă se introduce un dielectric cu $\varepsilon_r = 2$ care umple complet spaţiul dintre armături. Să se calculeze: a) variaţia energiei electrostatice a

adnotaţii……

adnotaţii …..

condensatorului în urma acestei operaţii; b) variaţia tensiunii dintre armături.

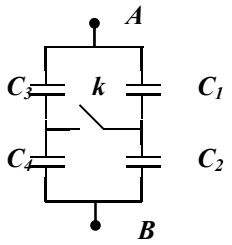
Rezultat: a) $|\Delta W| = 8{,}8 \cdot 10^{-9}\,\text{J}$ **; b)** $U_f = 2 \cdot 10^2\,\text{V}$ **.**

19. Se dă circuitul cu condensatoare din figura de mai jos, unde $C_2 = C_3 = 6\ \mu\text{F}$, $C_1 = C_4 = 4\ \mu\text{F}$. Să se calculeze capacitatea echivalentă între bornele A şi B când întrerupătorul k este:

a) deschis;

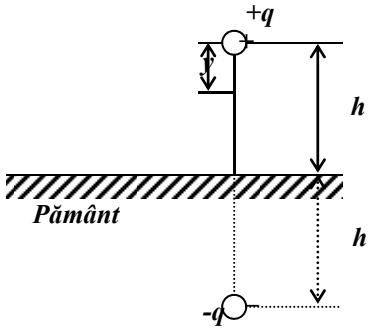
b) închis;

c) Care este sarcina electrică a condensatorului C1 în cazul a) dacă între bornele A şi B se aplică o tensiune U=102 V.



Rezultat: a) $C_d = 3\ \mu\text{F}$ **; b)** $C_i = 4\ \mu\text{F}$ **; c)** $q_1 = 1{,}5 \cdot 10^{-4}\,\text{C}$ **.**

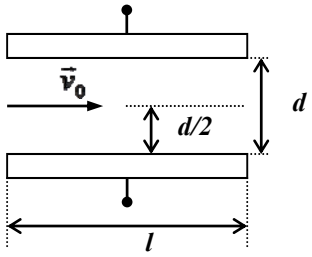
20. Să se calculeze câmpul şi capacitatea faţă de pământ (care are potenţialul zero) al unui conductor aerian rectiliniu sub forma unui cilindru de lungime l şi rază R paralel cu pământul şi încărcat cu sarcina +q.



adnotaţii……

Rezultat: $E=\dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0 l y}$, $C=\dfrac{q}{U}=\dfrac{q}{\dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\dfrac{2h}{R}}=\dfrac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\dfrac{2h}{R}}$.

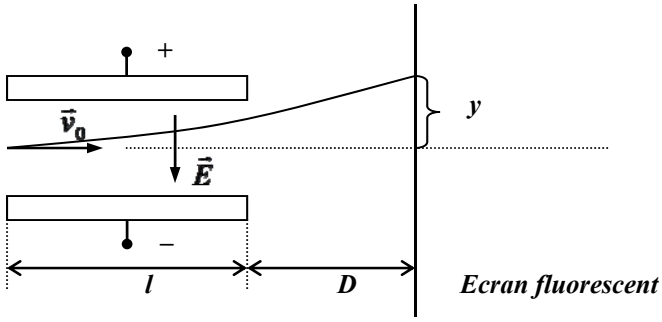
21. Un electron $\left(e=1{,}6\cdot10^{-19}\text{C},\ \ m=9{,}1\cdot10^{-31}\text{kg}\right)$ pătrunde cu viteza $v_0=160\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$ paralel cu armăturile unui condensator plan pe la mijlocul distanţei dintre armături (vezi figura). Cunoscând lungimea armăturilor, l=2cm, distanţa dintre armături, d=2mm, să se calculeze tensiunea maximă aplicată condensatorului pentru care electronul mai poate părăsi câmpul electric din condensator.



Rezultat: $y=\dfrac{\text{d}}{2}=\dfrac{at^2}{2}=\dfrac{1}{2}\dfrac{F}{m}t^2=\dfrac{1}{2}\dfrac{qE}{m}t^2=\dfrac{1}{2}\dfrac{e}{m}\dfrac{U}{\text{d}}\dfrac{l^2}{v_0^2}$, $U=\dfrac{m}{e}\dfrac{\text{d}^2}{l^2}v_0^2$,

$U=1{,}465\cdot10^{-9}\text{V}$.

22. Un electron pătrunde cu viteza v0 paralel cu armăturile unui condensator plan pe la mijlocul distanţei dintre armături. Cunoscând masa şi sarcina electronului (m, e), lungimea armăturilor (l), distanţa dintre armături (d), tensiunea dintre armături (U) şi distanţa de la condensator la un ecran fluorescent (D) să se deducă expresia deviaţiei electronului de la direcţia iniţială (Y) (vezi figura de mai jos).



adnotaţii …..

Rezultat: $y = \frac{1}{2}\frac{eU}{m\,\mathrm{d}\,v_0^2} l\left(l+2D\right)$.

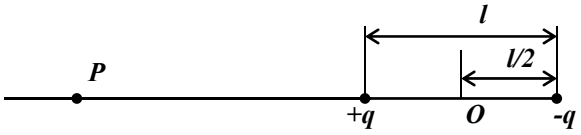
23. Un electron $\left(e = 1{,}6\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C},\ m = 9{,}1\cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}\right)$ este accelerat, din repaus, sub o diferenţă de potenţial $U_a = 10^4\,\mathrm{V}$. După accelerare electronul pătrunde perpendicular pe câmpul electric dintre armăturile unui condensator plan între armăturile căruia este aplicată o tensiune $U_C = 10^2\,\mathrm{V}$. Cunoscând distanţa dintre armături d=2cm, lungimea spaţiului parcurs paralel cu armăturile, l=20cm, distanţa dintre condensator şi un ecran fluorescent D=1m, să se calculeze deviaţia Y de la direcţia iniţială în momentul impactului electronului cu ecranul.

Rezultat: $eU_a = \frac{mv_0^2}{2}$, $y = \frac{1}{2}\frac{eU_C}{m\,\mathrm{d}\,v_0^2} l\left(l+2D\right)$, $y = 5{,}5\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}$.

24. Un electron pătrunde într-un condensator plan de lungime $l = 5\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}$ sub un unghi $\alpha = 2\pi/3$ faţă de direcţia câmpului electric dintre armături şi iese sub un unghi $\beta = 5\pi/6$. Să se calculeze energia cinetică iniţială a electronului dacă intensitatea câmpului electric dintre armăturile condensatorului este $E = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 10^5\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$.

Rezultat: $E_C = \frac{eEl}{2\cos^2\alpha_1\left(\mathrm{tg}\,\beta_1 - \mathrm{tg}\,\alpha_1\right)}$, $E_C = 2\cdot 10^{-4}\,\mathrm{J}$, **unde** $\alpha = \alpha_1 + \frac{\pi}{2}$ **şi** $\beta = \beta_1 + \frac{\pi}{2}$.

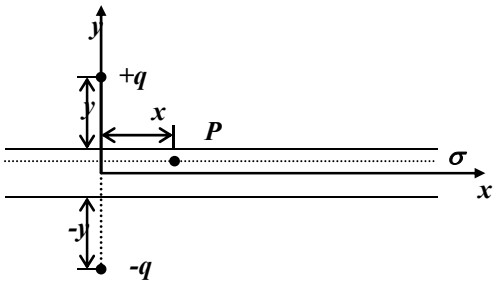
25. Un dipol electric (+q, –q) are distanţa dintre sarcini $l = 10^{-6}\,\mathrm{m}$. Să se calculeze distanţa r=OP de la centrul dipolului, O, pâna la un punct P situat pe axa dipolului astfel încât potenţialul dipolului electric în punctul P să fie egal cu potenţialul sarcinii electrice +q a dipolului care ar fi situată în punctul O.



adnotaţii……

Rezultat: $r = \frac{l}{2}\left(\sqrt{2} + l\right) = 1,207 \cdot 10^{-6}\,\text{m}$.

26. Să se calculeze densitatea superficială de sarcină electrică de pe suprafaţa unui plan conductor în vecinătatea căruia se află la distanţa y o sarcină electrică +q (vezi figura de mai jos). Indicaţie: se aplică metoda imaginilor (-q este imaginea sarcinii +q faţă de planul conductor) şi se ţine seama de câmpul electric al unui dipol electric.



Rezultat: $\sigma(x) = \varepsilon_0 E(x) = -\frac{2qx}{4\pi\left(y^2 + x^2\right)^{3/2}}$.

27. Două condensatoare având capacităţile C1=10μF şi C2=20μF sunt încărcate de la două surse: primul condensator la tensiunea $U_1 = 10^2\,\text{V}$ şi cel de al doilea la tensiunea $U_2 = 3 \cdot 10^2 V$. a) Care sunt sarcinile electrice şi energiile înmagazinate în cele două condensatoare. După aceasta condensatoarele sunt decuplate de la surse şi legate bornele lor pozitive între ele şi cele negative între ele. b) Care vor fi noile sarcini electrice de pe condensatoare şi energiile înmagazinate în fiecare?

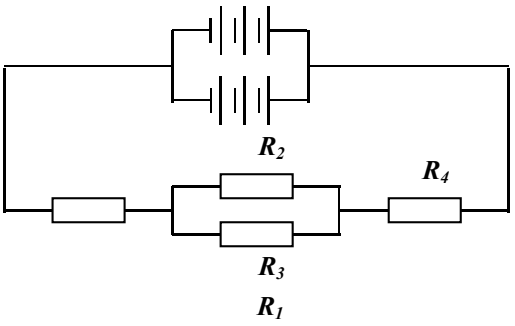
Rezultat: a) $q_1 = 10^{-3}\,\text{C}$; $q_2 = 6 \cdot 10^{-3}\,\text{C}$; $W_1 = 5 \cdot 10^{-2}\,\text{J}$; $W_2 = 90 \cdot 10^{-2}\,\text{J}$. **b)** $q_1^{'} = \frac{7}{3} \cdot 10^{-3}\,\text{C}$; $q_2^{'} = \frac{14}{3} \cdot 10^{-3}\,\text{C}$; $W_1^{'} = 27,2 \cdot 10^{-2}\,\text{J}$; $W_2^{'} = 54,4 \cdot 10^{-2}\,\text{J}$.

28. Care este energia potenţială a unui atom hidrogenoid (sistem atomic format dintr-un nucleu, cu sarcina +ze şi un electron, cu sarcina –e, situat la distanţa r de nucleu).

Rezultat: $W = -\frac{z \cdot e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$.

✍ adnotaţii …..

29. În circuitul din figura de mai jos sursele electrice au fiecare t.e.m. E =2V şi rezistenţa interioară r=1Ω. Rezistenţele au următoarele valori: R1=2Ω, R2=4Ω, R3=3Ω, R4=1Ω. Care este intensitatea curentului prin circuit şi căldura disipată în R3 în două minute?



Rezultat: $I = 0,966\text{A}$, $W_3 = 109,69\text{J}$.

30. Două consumatoare având rezistenţele R1=10Ω şi R2=30Ω sunt legate în serie la o sursă cu t.e.m. E =10V şi rezistenţa interioară r=2Ω. Ce tensiune indică un voltmetru cu rezistenţa internă RV=100Ω cu ajutorul căruia se măsoară tensiunea pe consumatorul având rezistenţa R1?

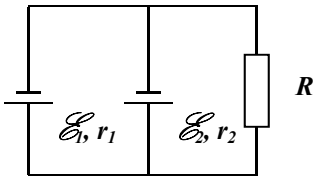
Rezultat: $U = 2,21\text{V}$.

31. În circuitul de mai jos se cunosc: E 1=130V, E 2=125V, r1=0,5Ω, r2=0,2Ω şi căderea de tensiune pe rezistorul R, U=118V. Să se calculeze:

a) intensităţile curenţilor I1 şi I2 prin cele două surse şi valoarea rezistenţei R;

b) energia disipată în rezistorul R în 5 minute;

c) cât ar trebui să fie t.e.m. $E1^{'}$ pentru ca intensitatea curentului prin această sursă să fie egală cu zero?



adnotaţii……

Rezultat: $I_1 = 24\text{A},\ I_2 = 35\text{A},\ I_R = 59\text{A},\ R = 2\Omega$ **; b)** $W = 2,08 \cdot 10^3 \text{kJ}$ **; c)** $\text{E}_1 = 113,6\text{V}$**.**

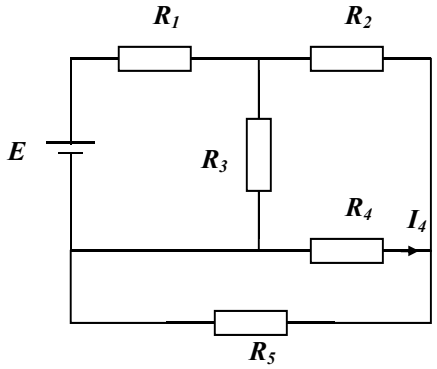
32. Două becuri fabricate să funcţioneze normal la tensiunea Ub=110V au puterile P1=40W şi P2=60W. Să se calculeze:

a) rezistenţa filamentelor becurilor şi intensităţile curenţilor prin lucru în regim normal de funcţionare;

b) dacă cele două becuri se leagă în serie la o tensiune U=220V, să se găsească valoarea rezistenţei care trebuie legată în paralel cu unul din becuri pentru funcţionarea normală a acestora.

Rezultat: a) $R_1 = 302,5\Omega,\ R_2 = 201,66\Omega,\ I_1 = 0,363\text{A},\ I_2 = 0,545\text{A}$ **; b)** $R_P = 604,94\Omega$**.**

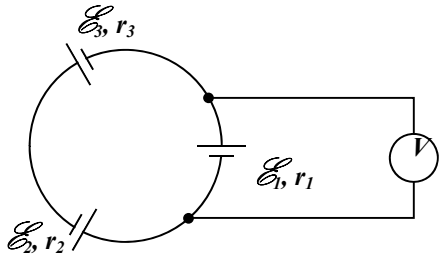
33. În circuitul din figură se cunosc: R1, R2, R3, R4, R5 şi intensitatea curentului I4 prin R4. Să se calculeze t.e.m. a sursei de alimentare.



Rezultat:

$$\mathscr{E} = \frac{I_4}{R_3 R_5}\left[R_1\left(R_2R_5 + R_3R_5 + R_4R_5 + R_2R_4 + R_3R_4\right) + R_3\left(R_2R_4 + R_2R_5 + R_4R_5\right)\right]$$

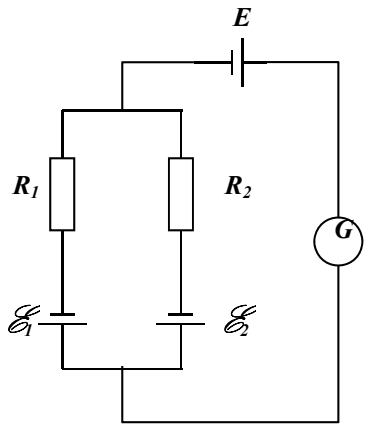
34. Trei elemente galvanice având t.e.m. E1, E 2, E 3 şi rezistenţele interioare r1, r2, r3, sunt grupate ca în circuitul din figură. Ce tensiune indică voltmetrul V care are rezistenţa interioară infinită?



adnotaţii …..

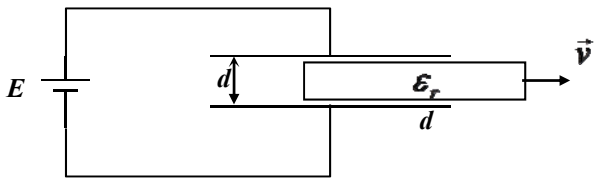
Rezultat: $U = \mathscr{E}_1 - r_1 \dfrac{\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2 + \mathscr{E}_3}{r_1 + r_2 + r_3}$

35. Fie circuitul a cărui schemă este reprezentată în figură. Ştiind că prin galvanometrul G curentul este nul să se deducă expresia t.e.m.E în funcţie de E 1, E 2, R1, R2.



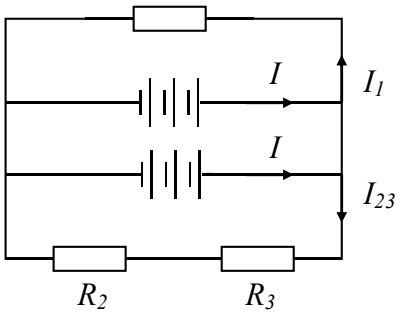
Rezultat: $\mathscr{E} = \dfrac{\mathscr{E}_{11} R_2 + \mathscr{E}_{12} R_1}{R_1 + R_2}$

36. În circuitul din figura de mai jos dielectricul cu permitivitatea electrică relativă ε_r, grosimea b este extras cu viteza v dintre armăturile unui condensator plan. Care este expresia curentului de polarizare?



Rezultat: $\mathrm{d}q = \sigma b v \,\mathrm{d}t = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 \dfrac{\mathscr{E}}{\mathrm{d}} b v \,\mathrm{d}t$; $I = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 \dfrac{\mathscr{E}}{t} b v$

37. Se dă circuitul din figura de mai jos în care cele 6 surse electrice au fiecare t.e.m. E=10V şi rezistenţa internă r. Cunoscând că rezistorul R1=10Ω are puterea P1=48,4W, iar R2=20Ω şi R3=30Ω să se calculeze intensităţile prin ramurile circuitului şi valoarea rezistenţei interne a bateriei.



Rezultat: I=1,32A, I_1=2,2A, I_{23}=0,44A, r=2Ω, $r_i = \frac{3r}{2} = 3\Omega$

38. În circuitul din figură se cunosc: E 1=10V, r1=r2=2Ω, E 2=15V, R1=10Ω, R2=20Ω, R3=30Ω şi R4=40Ω. Care este potenţialul punctului A din circuit?

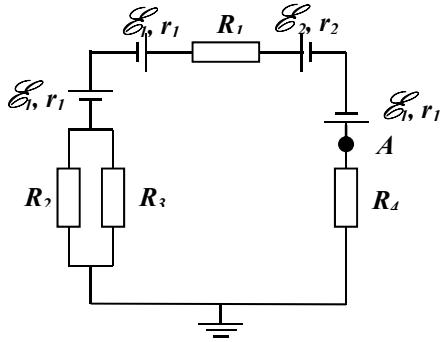


Figura 2.27

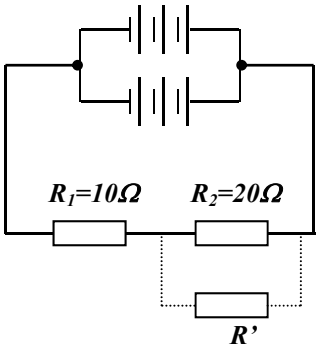
Rezultat: V_A**=8,57V.**

39. Circuitul din figură este alimentat de 6 surse electrice având fiecare t.e.m. E =10V şi rezistenţa internă r=12Ω. Să se calculeze:

a) puterea rezistorului R1;

b) pentru ce valoare a rezistenţei R' legată în paralel cu R2, puterea debitată de baterie pe circuitul exterior este maximă?

c) care este puterea rezistorului R1 când sunt îndeplinite condiţiile punctului b).

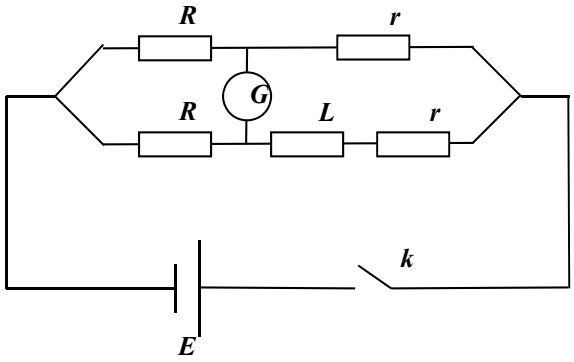


adnotaţii……

adnotaţii …..

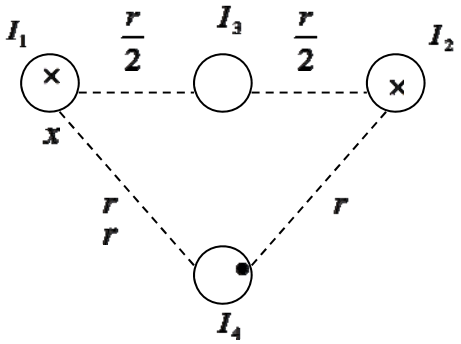
Rezultat: a) P_1**=6,25W; b)** $R' \cong$**13,33Ω; c)** $P_1^{'}$ **=8,33W.**

40. Se consideră circuitul a cărui schemă este reprezentată în figura de mai jos, unde G este un galvanometru balistic. Cunoscând mărimile E, R, r, L, să se calculeze sarcina electrică q ce trece prin galvanometru după închiderea întrerupătorului k.



Rezyultat: $I_0 = I_G + I_L$, $rI_r = rI_L + L\frac{\mathrm{d}I_L}{\mathrm{d}t}$; $q = \frac{LE}{2r(R+r)}$.

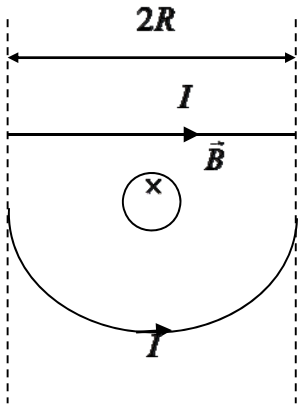
41. În figura de mai jos sunt reprezentate patru • conductoare rectilinii şi foarte lungi parcurse de curenţii I1=I2=2A, I3=3A, I4=1A. Cunoscând r=2m care este forţa electromagnetică pe unitatea de lungime care acţionează asupra conductorului parcurs de curentul I4 (se neglijează greutatea conductorului).



Rezultat: $\frac{F}{l} = 120\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$.

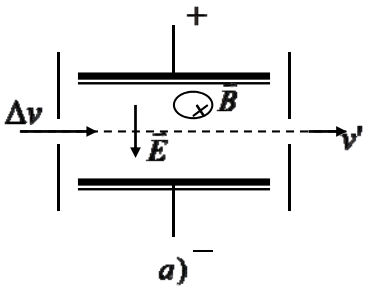
adnotaţii……

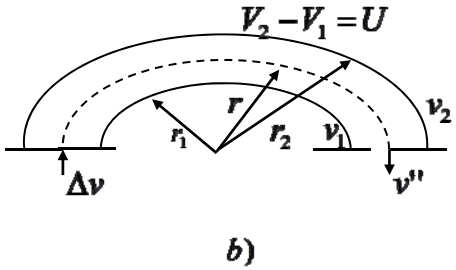
42. Un conductor semicircular de rază R şi un conductor rectiliniu de lungime 2R parcurse de acelaşi curent I sunt plasate într-un câmp magnetic uniform cu inducţia $\vec{B}$. Care este raportul forţelor care acţionează asupra celor două conductoare parcurse de curent?



Rezultat: $\frac{F_{rect}}{F_{circ}} = 1$.

43. Pentru separarea unor particule cu sarcina electrică q şi viteza v dintr-un fascicul de particule cu sarcina q dar cu o plaja de viteze Δ=v2-v1, (v1<v<v2) se utilizează filtrele de viteze. Acestea pot utiliza în funcţionare un ansamblu de câmpuri, unul electric şi unul magnetic sau un câmp electric radial dintre armăturile unui condensator cilindric. Care va fi valoarea vitezei selectată în fiecare caz.





Rezultat: $v' = \frac{E}{B}$; $v'' = \sqrt{\frac{qU}{m \ln \frac{r_2}{r_1}}}$.

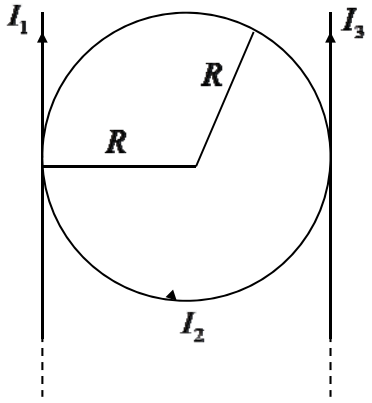
44. Un electron ($e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$, $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$) accelerat sub o diferenţă de potenţial U=200V pătrunde în câmpul magnetic al unui

adnotaţii …..

solenoid cu vid, sub un unghi α=30° faţă de axa acestuia. Ştiind că solenoidul are $N = 2 \cdot 10^3$ spire, lungimea l=50cm şi raza R=5cm, să se calculeze intensitatea curentului care trebuie să treacă prin solenoid pentru ca traiectoria elicoidală a electronului să rămână înscrisă în interiorul solenoidului. Aceeaşi întrebare pentru un proton ($e = -1,6 \cdot 10^{-19}\text{C}$, $m = 1,67 \cdot 10^{-27}\text{kg}$). Se dă: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}}$

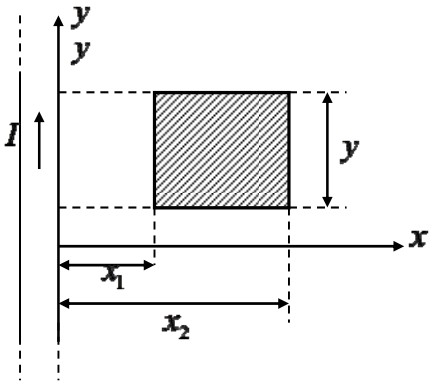
Rezultat: $I_{electron} \approx 1,9\text{A}$ $I_{proton} = 4,06\text{A}$.

45. Care este intensitatea câmpului magnetic (în aer) în centrul cercului de rază R=5cm datorat curenţilor I1=30A, I2=20A şi I3=10A.



Rezultat: $B = 33,12 \cdot 10^{-5}\text{T}$.

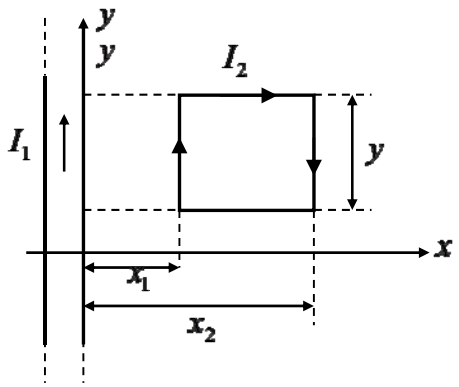
46. Să se calculeze fluxul câmpului magnetic prin conturul dreptunghiular din figură datorat curentului rectiliniu şi foarte lung de intensitate I.



adnotaţii……

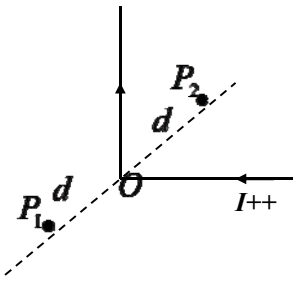
Rezultat: $\phi = \frac{\mu_0 y I}{2\pi} \ln \frac{x_2}{x_1}$.

47. Să se calculeze modulul forţei rezultante care acţionează asupra circuitului dreptunghiular parcurs de curentul I2 din partea curentului rectiliniu I1.



Rezultat: $F = \frac{\mu_0 I_1 I_2 y}{2\pi} \left(\frac{x_2 - x_1}{x_1 \cdot x_2} \right)$

48. .Un fir conductor frânt la 90° este parcurs de un curent electric cu intensitatea I. Să se calculeze intensitatea câmpului magnetic în punctele P1 şi P2 situate fiecare la distanţa d de punctul O.



Rezultat: $H_{P_1} = \frac{I}{2\pi \mathrm{d}} \left(\sqrt{2} - 1 \right)$, $H_{P_2} = \frac{I}{2\pi \mathrm{d}} \left(\sqrt{2} + 1 \right)$.

49. Să se calculeze fluxul magnetic între două conductoare paralele cu diametrul D dacă distanţa între conductoare este d, iar intensitatea curentului prin acestea este I. Calculul se va face pentru o lungime a liniei l, cele două conductoare fiind parcurse de curenţi de sens contrar.

adnotaţii …..

Rezultat: $\Phi = \mu_0 \frac{Il}{\pi}\left(\mu_r + \ln\frac{2d}{D}\right)$**.**

50. O baterie cu tensiunea electromotoare E=9V şi rezistenţa internă ri este conectată la un circuit alcătuit dintr-o rezistenţă R1=2Ω şi un solenoid cu rezistenţa RS=8Ω format din N=100 spire, secţiunea S=25cm2 şi lungimea l=9,42cm. În paralel cu solenoidul se găseşte un voltametru cu sulfat de cupru care are rezistenţa RV=4Ω. Ştiind că într-un timp de 100 secunde se depun la catodul voltametrului m=32mg de cupru, să se calculeze:

a) intensitatea curentului prin voltametru;

b) valoarea fluxului magnetic prin solenoid şi inductanţa solenoidului;

c) rezistenţa internă a bateriei.

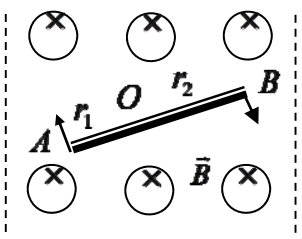
Se cunosc: echivalentul electrochimic al cuprului $k = 0,32\cdot 10^{-6}\,\text{kg/C}$ şi permeabilitatea vidului $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\,\frac{\text{N}}{\text{A}^2}$.

Rezultat: a) I_V**=1A; b)** $\Phi_{sol} = 0,166\cdot 10^{-5}\,\text{Wb}$**,** $L = 0,333\cdot 10^{-5}\,\text{H}$**; c)** r_i**=1,33Ω.**

51. O spiră cu raza r şi rezistenţa electrică R este situată perpendicular pe liniile unui câmp magnetic a cărui inducţie magnetică este B=B0cosωt. Care este expresia intensităţii curentului electric ce străbate spira?

Rezultat: $i = \frac{\pi r^2 B_0 \omega}{R}\sin\omega t$ **.**

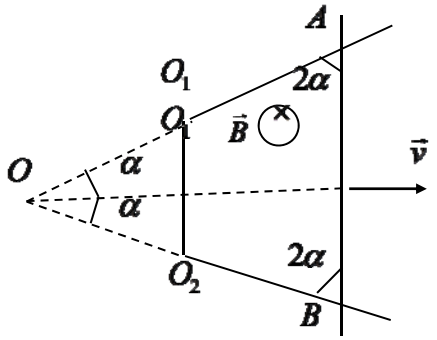
52. O bară conductoare AB se roteşte cu frecvenţa υ în jurul unui punct O care este poziţionat pe bară astfel încât OA=r1 şi OB=r2>r1. Planul în care se roteşte bara este perpendicular pe liniile unui câmp magnetic uniform cu inducţia B. Care este tensiunea indusă în bază.



adnotaţii……

Rezultat: $\mathscr{E} = \pi B\upsilon\left(r_2^2 - r_1^2\right)$.

53. O bară conductoare AB se deplasează cu viteza $v = 1\frac{\text{m}}{\text{s}}$ sprijinindu-se pe şinele conductoare reprezentate în figură şi care sunt perpendiculare pe liniile unui câmp magnetic uniform cu inducţia magnetică B=1T. Cunoscând că bara AB are poziţia iniţială suprapusă peste O1O2 şi că α=30°, O1O2=2m, care este modulul t.e.m. induse în bară la un moment oarecare?



Rezultat: $\mathscr{E} = 2\left(1 + \frac{t}{\sqrt{3}}\right)$.

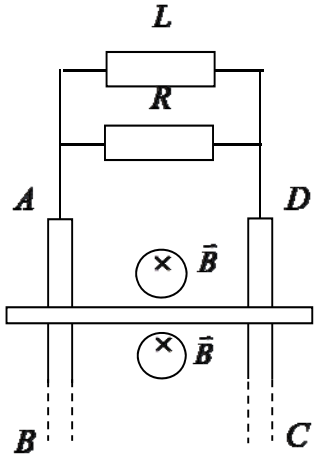
54. O spiră circulară cu rezistenţa R=2Ω şi raza r=10cm este situată într-un câmp magnetic uniform cu inducţia $B = 4 \cdot 10^{-5}\text{T}$. Suprafaţa spirei este perpendiculară pe liniile câmpului magnetic. Să se calculeze cantitatea de electricitate care trece printr-o secţiune a spirei dacă aceasta se roteşte cu 9°.

Rezultat: $q = 6,28 \cdot 10^{-7}\text{C}$.

55. Se consideră două şine conductoare verticale paralele, AB şi CD, cu rezistenţa electrică neglijabilă. Planul şinelor este perpendicular pe liniile unui câmp magnetic omogen cu inducţia magnetică $\vec{B}$. Şinele sunt legate prin rezistorul R şi bobina ideală de inductanţă L (vezi figura de mai jos). O bară cu masa m, lungimea l şi rezistenţă neglijabilă este lăsată

adnotaţii …..

să cadă liber (din punctul de coordonate y0=0) sprijinindu-se pe şine. Să se deducă expresia coordonatei y a barei în funcţie de timp pe parcursul căderii.



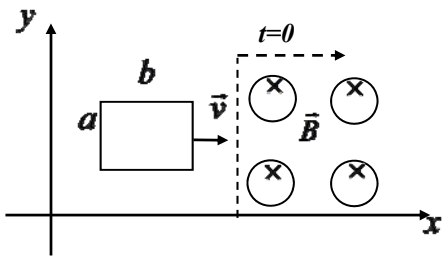
Rezultat: $y = \frac{mgL}{B^2l^2}(1 - e^{-\frac{B^2l^2}{mR}t}\cos\frac{Bl}{\sqrt{m^2}}\cdot t)$.

56. Un cadru conductor dreptunghiular se deplasează cu viteza constantă v spre un câmp magnetic uniform B. Cunoscând mărimile fizice: B, v, a, b. Să se găsească expresiile fluxului magnetic şi a t.e.m. din cadru în următoarele cazuri:

a) cadrul nu a pătruns în câmp;

b) cadrul pătrunde în câmp;

c) cadrul se găseşte total în câmp.



Rezultat: a) $\phi = 0$, $\mathscr{E}$**=0; b)** $\phi(t) = Bavt$, $\mathscr{E}$**=***Bav*, $0 \le t \le \frac{b}{v}$**; c)** $\phi = Bab$, $\mathscr{E}$**=0** $t > \frac{b}{v}$.

adnotaţii……

57. O sursă de unde electromagnetice plane oscilează după legea Es(t)=5sin1010t $\left(\frac{V}{m}\right)$. Unda electromagnetică se propagă pe direcţia Ox cu viteza v=200.000 $\frac{\text{km}}{\text{s}}$. Care sunt:

a) ungimea de undă;

b) dependenţa de timp a vectorilor intensitate a câmpului electric şi a inducţiei magnetice.

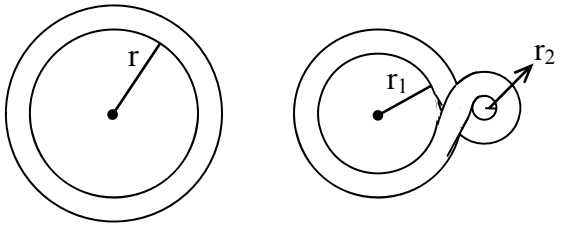
Rezultat: a) $\lambda = \frac{v}{\upsilon} = \frac{2\pi v}{\omega}, \quad \lambda = 4\pi \cdot 10^{-2}\,\text{m}$ **; b) ;** $B_0 = \frac{E_0}{v} = \frac{4}{2\cdot 10^8} = 2\cdot 10^{-8}\,\text{T}$

$B(x,t) = 2\cdot 10^{-8}\sin(10^{10}t - 50x)(\text{T})$**.**

58. Amplitudinea oscilaţiilor intensităţii câmpului electric ale unei unde electromagnetice care se propagă în apă este Emax=8 $\frac{\text{V}}{\text{m}}$. Cunoscând că pentru apă $\varepsilon_r = 81$ şi $\mu_r = 1$, să se calculeze intensitatea undei.

Rezultat: $P = \frac{1}{2}E_{\max}\cdot H_{\max} = \frac{1}{2}E_{\max}^2\sqrt{\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r}{\mu_0\mu_r}} = 0,76\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$**.**

59. Conductorul filiform din figura de mai jos, a), se află perpendicular pe liniile unui câmp magnetic omogen variabil în timp. Tensiunea electromotoare indusă în conductorul circular de rază r este E. Care este t.e.m. indusă în conductorul filiform din aceeaşi figură b) obţinut din conductorul iniţial şi care este situat cu planul celor două spire perpendicular pe acelaşi câmp magnetic?

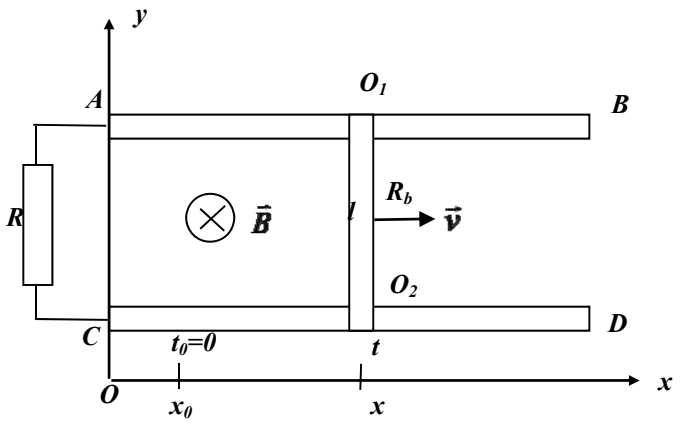


a) b)

Rezultat: $\mathscr{E}' = \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2}\,\mathscr{E}$.

✍ adnotaţii …..

60. O bară conductoare cu lungimea O1O2=l şi rezistenţa Rb se deplasează cu viteza v=3t perpendicular pe liniile unui câmp magnetic uniform cu inducţia magnetică $\vec{B}$. Baza se sprijină pe două şine conductoare (figura 4.13), AB şi CD, care au rezistenţa pe metru liniar, egală cu r. Să se găsească expresia intensităţii curentului electric prin circuit în funcţie de timp, ştiind că bara are la momentul t0=0 coordonata x=x0.



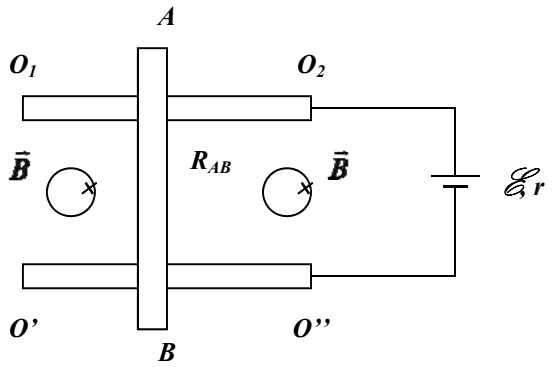
Rezultat: $i = \dfrac{3Blt}{R + R_b + 2r(x_0 + \dfrac{3}{2}t^2)}$.

61. Un solenoid cu vid având N=100 spire, lungimea l=10cm şi secţiunea S=6cm2 este străbătut de un curent electric $i = 20\sqrt{2}\cos 50\pi t(\mathrm{A})$. Care este tensiunea maximă indusă în solenoid.

Rezultat: $\mathscr{E}$ **= 33,46V.**

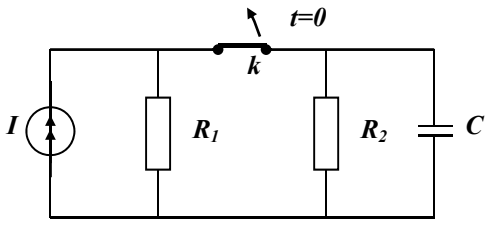
62. În figura de mai jos este reprezentată o schemă electrică în care sursa electrică are t.e.m. E şi rezistenţa internă r şi alimentează un circuit format din două şine paralele O1O2 şi O'O'', cu rezistenţă neglijabilă. Pe şine se poate deplasa fără frecare o bară conductoare AB cu lungimea l şi rezistenţa electrică RAB. Perpendicular pe planul circuitului sunt liniile unui câmp magnetic uniform cu inducţia magnetică $\vec{B}$. Să se calculeze: a) intensitatea curentului în circuit când bara AB este ţinută în repaus; b)

forţa cu care trebuie acţionat din exterior asupra barei pentru a o deplasa pe şine cu viteza constantă $\vec{v}$.



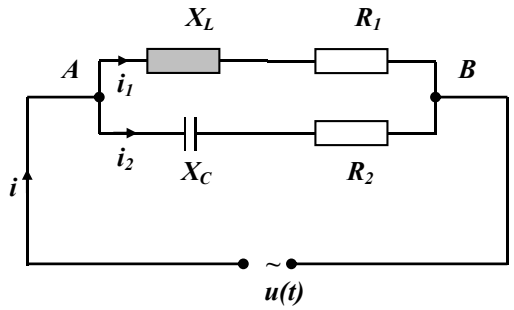
Rezultat: a) $I_{rep}=\frac{\mathscr{E}}{R_{AB}+r}$ **; b)** $F=B\cdot\frac{\mathscr{E}-Blv}{R_{AB}+r}\cdot l$ **.**

63. Circuitul din figură este în regim staţionar, cu întrerupătorul k închis. Sursa debitează în regim staţionar curentul I=30A. Cunoscând R1=1Ω, R2=10Ω şi C=3600 μF să se calculeze tensiunea la bornele condensatorului la momentul t=25ms de la deschiderea întrerupătorului.



Rezultat: $u_{t=25ms}$**=13,6V.**

64. În schema circuitului din figură se cunosc: $X_L=10^2\Omega$, $R_1=10^2\Omega$, $R_2=50\Omega$, $X_C=86,6\Omega$. Tensiunea de alimentare a circuitului este $u(t)=120\sin 100\pi t$ (V). Să se exprime dependenţa de timp a intensităţilor curenţilor din circuit (i1, i2, i).



adnotaţii……

adnotaţii …..

Rezultat: $i_1(t) = 0,85\sin\left(100\pi t - \frac{\pi}{4}\right)$ **(A);** $i_2(t) = 1,2\sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$ **(A);**

$i(t) = 1,28\sin\left(100\pi t + 20^\circ\right)$ **(A).**

65. O bobină reală, cu rezistenţa R şi inductanţa L, alimentată la tensiunea $u = 12\sin 500t$ (V) este parcursă de curentul $i = 4\sin\left(500t - \frac{\pi}{3}\right)$ (A). Să se calculeze:

a) rezistenţa şi inductanţa bobinei;

b) energia termică disipată în bobină în 10 minute;

c) valoarea maximă a energiei câmpului magnetic din bobină;

d) valoarea instantanee a intensităţii curentului prin bobină dacă frecvenţa tensiunii de alimentare se reduce la jumătate.

Rezultat: a) R=1,5Ω; $L = 3\sqrt{3}$mH **; b)** W_Q**=7,2kJ; c)** W_{max}**=41,6mJ;**

d) $i(t) = 6,05\sin\left(250t - arctg\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **(A).**

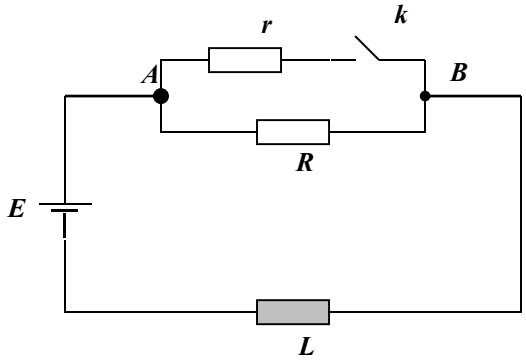
66. Un condensator cu capacitatea C=100μF este încărcat la o tensiune U după care este lăsat să se descarce pe un rezistor cu rezistenţa R=1kΩ. După cât timp tensiunea pe condensator se reduce la jumătate?

Rezultat: *t=0,1 ln2* **s.**

67. Fie un circuit electric a cărui schemă este reprezentată în figura de mai jos. Să se exprime tensiunea între punctele AB ale circuitului în funcţie de E, R1, R2, L în următoarele două cazuri:

a) la un moment t oarecare după închiderea întrerupătorului k;

b) la un moment t oarecare după deschiderea întrerupătorului k.



Rezultat: a) la *t*=0, $I_0 = \frac{\mathscr{E}}{R}$, $U_{AB} = I \cdot \frac{R \cdot r}{R+r} = \mathscr{E}\left(1 - \frac{R}{R+r} e^{-\frac{R \cdot r}{L(R+r)} t}\right)$**; b) la *t*=0,** $I_0 = \frac{E}{\frac{R \cdot r}{R+r}}$, $U'_{AB} = IR = E\left(1 + \frac{R}{r} e^{-\frac{R}{L} t}\right)$**.**

68. Un circuit R, L, C serie este alimentat de la o sursă de tensiune alternativă cu $u(t) = 220\sqrt{2}\sin 100\pi t$ (V). Condensatorul din circuit este plan cu aer $\left(\varepsilon_0 \cong 8{,}8 \cdot 10^{-12} \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}\right)$, are suprafaţa armăturilor S=100 cm2 şi distanţa dintre armături $\mathrm{d} = 8{,}8 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}$. Bobina ideală are L=10H, iar rezistorul are rezistenţa R=1kΩ. Se cere:

a) intensitatea curentului în circuit;

b) permitivitatea dielectricului ce trebuie introdus între armături pentru ca intensitatea curentului prin rezistor să fie maximă şi valoarea intensităţii curentului maximă.

a) $I = 7{,}66 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{A}$**; b)** $\varepsilon_r = 10{,}14$**;** I_{max}**=0,22A.**

adnotaţii……

BIBLIOGRAFIE GENERALĂ

[1] ***Moşescu***, N.; ***Hotinceanu***, M., (1987), *Îndrumar pentru disciplina – FIZICA*, volumul II, Ploieşti, Institutul Petrol şi Gaze Ploieşti

[2] ***Luca***, E.; ***Ciubotariu***, C.; ***Zet***, Gh.; ***Vasiliu***, A., (1986), *Fizică*, Bucureşti, Editura Didactică şi Pedagogică

[3] ***Nicula***, Al.; ***Cristea***, Gh., ***Simon***, S., (1982), *Electricitate şi magnetism*, Bucureşti, Editura Didactică şi Pedagogică

[4] ***Dima***, I.; ***Gherbanovschi***, N.; ***Secăreanu*** I., (1981), *Electricitate şi magnetism (Note de curs)*, Bucureşti, Universitatea Bucureşti

[5] ***Tutovan***, V.; ***Gotlieb***, I., (1998), *Electricitate şi magnetism*, *Probleme de electrostatică*, Chişinău, Editura Tehnică

[6] ***Purcell***, E. M., (1982), *Electricitate şi magnetism (Cursul de fizică Berkeley, vol II)*, Bucureşti, Editura Didactică şi Pedagogică

[7] ***Hagiescu***, M.; ***Hotinceanu*** M., (1979), *Probleme şi aplicaţii pentru cursul de fizică*, Ploieşti, Institutul Petrol şi Gaze

[8] ***Popescu***, I. M.; ***Cone***, G. F.; Stanciu, G. A., (1996), *Culegerea de probleme de fizică*, Bucureşti, Editura Didactică şi Pedagogică

[9] ***Inţa***, I.; ***Dumitru***, S., (1982), *Complemente de fizică*, Bucureşti, Editura Tehnică

[10] ***Tutovan***, V., (1984), *Electricitate şi magnetism,* Bucureşti, Editura Tehnică

[11] ***Feynman***, R. P., (1970), *Fizica modernă – Electromagnetismul, structura materiei,* Bucureşti, Editura Tehnică

[12] ***Creţu***, T., (1984), *Fizica Generală, vol I*, Bucureşti, Editura Tehnică

[13] ***Hotinceanu***, M., (2001), *Probleme şi lucrări de laborator de electromagnetism*, Ploieşti, Editura ILEX şi Editura Universităţii din Ploieşti,

[14] ***Niculescu***, T.; ***Costinaş***, S., (1998), *Electrotehnică, Câmpul electromagnetic*, Petroşani, Litografia Universităţii din Petroşani

[15] ***Saimac***, A.; ***Cruceru***, C., (1981), *Electrotehnică*, Bucureşti, Editura didactică şi Pedagogică Bucureşti

[16] ***Luca***, E., (1976), *Elemente de fizică modernă*, (21), Iaşi, Editura Junimea

[17] ***Bodea***, M., (1997), *Fizica pentru ingineri*, vol II, Braşov, Universitatea "Transilvana" Braşov

[18] ***Whitmer***, R. M., (1963), *Electromagnetics*, New Jersey, Englewood Cliffs

[19] ***Vrejoiu***, C., ş.a., (1983), Fizică Mecanică, Bucureşti, Editura didactică şi Pedagogică Bucureşti

[20] ***Hotinceanu***, M., (1994), *Elemente de fizică aplicată*, Editura Universităţii din Ploieşti